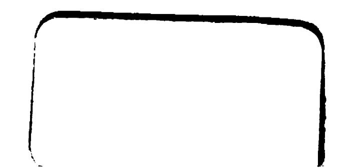

Stanford University Libraries
3 6105 000 993 019
Digitized by Google



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Als Fortsetzung des von

A. L. Crelle

gegründeten Journals

herausgegeben

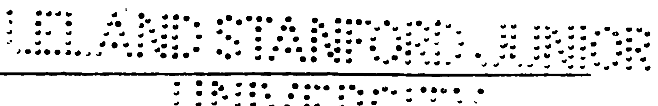
unter Mitwirkung der Herren

Steiner, Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass

von

C. W. Borchardt.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Acht und funfzigster Band.

In vier Heften.

Berlin, 1861.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

Inhaltsverzeichnifs des acht und funfzigsten Bandes.

Beiträge zur Theorie der Vertheilung der statischen und der dynamischen Electricität in leitenden Körpern.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Bonn.)

Das Princip für die Vertheilung der statischen Electricität in einem leitenden Körper, auf den beliebige äufsere Kräfte wirken, ist bekanntlich durch *Poisson* *) aufgestellt worden und besteht darin, dafs die Wirkung dieser Kräfte und die Wirkung der an der Oberfläche des Leiters erregten electrischen Schicht auf jeden Punkt im Innern desselben sich zerstören mufs. Diese Bedingung kann nach *Gaufs* **) durch die einfachere ersetzt werden, dafs das Potential der bezeichneten Gesammtwirkung an der Oberfläche des Körpers einen constanten Werth habe: sobald dieser Werth oder statt dessen die Menge der dem Leiter mitgetheilten Electricität, und der Werth des Potentials der inducirenden Kräfte für die Oberfläche gegeben ist, hat die Aufgabe der electrischen Vertheilung nur Eine Lösung und ist immer lösbar. Die Aufgabe ist also unabhängig von dem Sitz der erregenden Kräfte, schliefst aber eine unbeschränkte Mannigfaltigkeit doppelter Art in sich, indem die Gestalt des Leiters eine beliebige ist und der gegebene Potentialwerth mit Beobachtung der Stetigkeit für jede Stelle der Oberfläche frei gewählt sein kann. Wenn es nun gelang, die Schwierigkeiten, welche aus diesen beiden Quellen entspringen, von einander zu sondern und die eine derselben zu überwinden, so hatte die Analyse einen wesentlichen Fortschritt gemacht, und diesen erkennen wir in den Untersuchungen von *Green* ***), welche vor der Publication der angeführten Abhandlung von *Gaufs* ausgeführt, jedoch erst später in Deutschland bekannt gemacht sind. *Green* weist nach, dafs für jede Form des Leiters eine Fundamentalaufgabe zu lösen ist, bei der der gegebene Potentialwerth gleich der reciproken Entfernung eines beliebig gelegenen Punktes

---

*) Deux mémoires sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs. Mém. de l'Inst. de l'année 1811.

**) Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstofsungs-Kräfte. Art. 30 bis 34.

***) Bd. XXXIX, pag. 76; Bd. XLIV, pag. 356; Bd. XLVII, pag. 161 und pag. 195 dieses Journals.

von jedem Punkte der Oberfläche des Leiters ist, und dafs hieraus die Lösung der entsprechenden Aufgabe für einen willkürlichen Potentialwerth, wie sie vorhin gestellt ist, durch eine doppelte Integration erhalten wird. Für den speciellen Fall der Kugel findet man denselben Gedanken, obwohl nicht in Worten ausgesprochen, in dem Aufsatz von *Dirichlet* „über einen neuen Ausdruck zur Bestimmung der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale etc.", in den Abh. d. Berl. Academie vom Jahre 1850. Man vermifst in der Darstellung von *Green* bisweilen die nothwendige Schärfe; allein für das in Rede stehende Resultat ist es mit Hülfe der unvergleichlichen Arbeit von *Gaufs* nicht schwer, diesen Mangel zu ergänzen. Indem ich dies ausführte habe ich bemerkt, dafs gewisse Probleme in Betreff der Vertheilung der electrischen Ströme in körperlichen Leitern eine ähnliche Behandlung erlauben wie die erwähnten electrostatischen Probleme. Wenn ein körperlicher Leiter von constantem Widerstande mit beliebigen linearen Leitern in Verbindung gesetzt ist, so kann die Bestimmung der Stromvertheilung in seinem Innern nach den Arbeiten der Herren *Kirchhof* *) und *Helmholtz* **) so aufgefafst werden, dafs man die Einströmungspunkte der Electricität in den Leiter durch einfache electrische Massenpunkte ersetzt, und für den innern Raum desselben eine Potentialfunction fordert, deren Differentialquotient nach der Normale der Oberfläche genommen an jeder Stelle gleich dem ebenso genommenen Differentialquotienten des Potentials der innern electrischen Massen wird. Dann ist die gesuchte Spannung für jeden Punkt des Leiters gleich dem Potential der innern Massen, vermindert um die verlangte Potentialfunction. Man bemerkt sogleich, dafs diese Potentialfunction nur von dem für die Oberfläche gegebenen Werthe jenes Differentialquotienten abhängt, allein so allgemein man auch die Vertheilung der innern Massen annehmen möge, es bleibt immer nothwendig, die algebraische Summe derselben gleich Null vorauszusetzen, und daraus folgt, dafs die Summe, deren Element jener Differentialquotient mit dem Element der Oberfläche multiplicirt ist, für die ganze Fläche ebenfalls gleich Null sein mufs ***). Behandelt man ferner die ideale Aufgabe, bei der der unendliche Raum mit Ausschlufs eines gewissen endlichen Raumes als gleichförmig leitend, dieser endliche Raum als nicht-

---

*) *Poggendorfs* Annalen Bd. LXXV, pag. 189 ff.
**) *Poggendorfs* Annalen Bd. XXCIX, pag. 211 ff.
***) Cf. *Gaufs* l. c. art. 23.

leitend angesehen wird, so ist für die aufzusuchende Potentialfunction die Bedingung hinzuzufügen, dafs sie in unendlicher Entfernung von dem nichtleitenden Raume verschwinde. Für die im leitenden Raume angenommenen electrischen Massen hat man alsdann analytisch keine Beschränkung, aber die Stetigkeit ihres Potentials im nichtleitenden Raume bedingt wieder das Verschwinden der aus den Werthen jenes Differentialquotienten gebildeten und über die ganze Fläche ausgedehnten Summe *). Denkt man sich nun für eine gewisse geschlossene Fläche eine bis auf das Nullwerden ihrer über die ganze Fläche genommenen Summe willkürliche stetige Function gegeben, und fragt nach einer Potentialfunction für den *innern Raum*, und zugleich nach einer in unendlicher Entfernung von der Fläche verschwindenden Potentialfunction für den *äufsern Raum*, bei welcher der nach der Normale der Fläche genommene Differentialquotient an jeder Stelle der Fläche gleich der vorgeschriebenen Function wird, so läfst sich diese allgemeine Aufgabe immer lösen und für jede Gestalt der Fläche auf eine von der willkürlichen Function unabhängige Fundamentalaufgabe zurückführen. Bei der letzteren ist die gegebene Function entweder *gleich* dem nach der Normale der Fläche genommenen Differentialquotienten der reciproken Entfernung eines beliebig gelegenen Punktes von jedem Punkte der Oberfläche, oder von diesem Differentialquotienten *um eine gewisse allgemein bestimmte Gröfse verschieden,* und die allgemeine Aufgabe wird dadurch auf die Ausführung einer doppelten Integration reducirt.

Wenn die Auflösung des electrostatischen und des electrodynamischen Fundamentalproblems in dem angegebenen Sinne ein geschlossener Ausdruck ohne Integralzeichen ist, so hat die Auflösung des allgemeinen Problems die Form eines Doppelintegrals. Dies zeigt sich in dem Fall, dafs der Leiter die Gestalt einer Kugel hat; die electrostatische Vertheilung in geschlossener Form ist hier (wie schon bemerkt) durch *Dirichlet* und durch *Green* **), die electrodynamische durch Herrn *Helmholtz* ***) allgemein bestimmt worden. Da der letztgenannte das vollständige Potential der innern electrischen Massen auch für die Auffindung der oben characterisirten Potentialfunction als gegeben annimmt, so erscheint seine Lösung als einfaches Integral; betrachtet man aber nur den Werth des Differentialquotienten ihres Potentials für die Ober-

*) Cf. *Gaufs* l. c. art. 23.

**) L. c. art. 10, Bd. XLVII, pag. 168 ff.

***) *Poggendorfs* Annalen Bd. XXCIX, pag. 231 ff.

fläche als gegeben, wie ich es gethan habe, so ist die doppelte Integration in keiner Weise zu vermeiden. Es scheint nun von Interesse zu erfahren, ob auch für andre Formen des Leiters die Fundamentalauflösungen eines einfachen Ausdrucks fähig sind. Bei dem Rotationsellipsoid ist man durch die Arbeiten der Herrn *Lamé* *), *Heine* **) und *Neumann* ***) in den Stand gesetzt, diese Lösungen als unendliche Doppelreihen sofort anzugeben, und es handelt sich um die Summation derselben. Für den Fall, dafs das abgeplattete Rotationsellipsoid in einen Kreis übergeht, vereinfachen sie sich bedeutend; und obgleich die electrodynamische Aufgabe alsdann nur eine ideale physikalische Bedeutung behält, so ist die gleichzeitige Behandlung beider Aufgaben der Analyse vortheilhaft. Eine — so viel ich weifs — bisher nicht bemerkte Relation zwischen den Particularlösungen der Differentialgleichung, aus denen jene unendlichen Reihen zusammengesetzt sind, gab das Mittel an die Hand, dieselben als Doppelintegrale darzustellen, und diese Art der Umformung scheint auch von allgemeinerem Nutzen zu sein; für die gesuchten Auflösungen aber gingen schliefslich einfache Ausdrücke hervor, die geometrisch leicht zu deuten sind und keine Transcendente als arctg. enthalten.

Da die electrostatische Vertheilung in einem Kreise bereits den Gegenstand einer wenn auch nur in ihren Resultaten vollständig mitgetheilten Untersuchung des Herrn *Heine* bildet (Monatsbericht der Berliner Academie vom Jahre 1854, pag. 564), so habe ich als Ergebnifs der Vergleichung dieser Arbeit mit der meinigen anzuführen, dafs dieselben von ganz verschiedenen Grundbetrachtungen ausgehen und dafs auch die Resultate nur für den Fall eines um den Kreismittelpunkt symmetrisch vertheilten Potentialwerths, auf welchen sich der *Heine*sche Ausdruck 𝔄 bezieht, übereinstimmen. Im allgemeinen Fall dagegen, wo der von Herrn *Heine* mit *A* bezeichnete Ausdruck in Betracht kommt, erhielt ich ein abweichendes Resultat, und eine vorgenommene Verification ergab, dafs das meinige den Bedingungen der Aufgabe genügt, während das des Herrn *Heine* auf einen Widerspruch führt. Den Grund hiervon hat Herr *Heine*, wie ich aus brieflicher Mittheilung desselben weifs, seitdem in einem Rechnungsfehler gefunden, welcher indessen nur die in seiner erwähnten Mittheilung von Mitte pag. 568 bis Ende pag. 569 gegebenen Formeln berührt.

---

*) *Liouvilles* Journal Bd. IV, pag. 126 ff. und pag. 351 ff.

**) Bd. XXVI, pag. 185 dieses Journals.

***) Bd. XXXVII, pag. 21 dieses Journals.

Für den Fall, dafs das verlängerte Ellipsoid, welches die Gestalt des Leiters bezeichnet, sich der graden Linie nähert, ohne jedoch diese Grenze völlig zu erreichen, gestatten beide Fundamentalaufgaben eine ähnliche Behandlung wie beim Kreise, doch tragen die entsprechenden Resultate ihrer Natur nach einen specielleren Character an sich.

In dem vorliegenden Aufsatz werde ich diese Untersuchungen in derselben Ordnung mittheilen, in der ihrer Erwähnung geschehen ist. Zuerst wird die Zurückführung der allgemeinen Vertheilungsaufgabe für statische Electricität auf die Grundaufgabe nach *Green* angegeben und bewiesen, und dann die correspondirende Zurückführung der allgemeinen Aufgabe für dynamische Electricität dargestellt. Nachdem darauf die Grundaufgaben für das Rotationsellipsoid in Reihenform gelöst sind, werden die Auflösungen für den Fall des Kreises und der Annäherung an die gerade Linie in geschlossener Form entwickelt.

§. 1.

Wenn die Oberfläche des leitenden Körpers, für den die Vertheilung der statischen Electricität bestimmt werden soll, durch S, und der für jeden Punkt B in S willkürlich gegebene stetige Potentialwerth durch f bezeichnet wird, so hat man die Aufgabe, eine electrische Belegung für S zu finden, deren Potential in jedem Punkte B den vorgeschriebenen Werth f annimmt; die eindeutig bestimmte Dichtigkeit dieser Belegung in jedem Punkte B werde P genannt. Es bedeute nun A irgend einen festen Punkt im Raume, r die Entfernung der Punkte A und B, so besteht die Fundamentalaufgabe darin, diejenige Belegung für S zu suchen, deren Potential in B den Werth $\frac{1}{r}$ hat, und deren Dichtigkeit in B durch ϱ bezeichnet werden soll. Dann wird das Potential V der Wirkung der electrischen Schicht P auf den Punkt A durch diese Gleichung ausgedrückt:

$$(1.) \qquad V = \int f \varrho \, \partial \omega,$$

wo $\partial \omega$ das Element der Fläche S ausdrückt, und die Integration über die ganze Fläche auszudehnen ist. Um dies zu beweisen hat man nur den Satz von *Gaufs* *) anzuwenden, dafs, wenn für dieselbe Fläche S zwei Belegungen existiren, deren Dichtigkeiten in B gleich P und ϱ, und deren Potential-

*) L. c. art. 19.

werthe in B respective gleich f und $\frac{1}{r}$ sind, die beiden über die ganze Fläche zu nehmenden Integrale $\int f\varrho\,\partial\omega$ und $\int\frac{1}{r}P\partial\omega$ einander gleich sind. Die Existenz jener Belegungen ist durch *Gaufs* erwiesen; es ist aber $\int\frac{1}{r}P\partial\omega$ das Potential der Schicht P in Bezug auf den Punkt A genommen, mithin $V=\int f\varrho\,\partial\omega$, wie behauptet wurde. Nun kann A successive jeden Punkt des Raumes vorstellen; errichtet man in einem Punkte B eine Normale, bestimmt in dieser zwei Punkte, welche von der Fläche selbst um $+\partial p$ nach aufsen und um $-\partial p$ nach innen abstehn, und nennt den Werth von V für diese Punkte respective V_a und V_i, so wird für ein abnehmendes ∂p die Dichtigkeit P im Punkte B durch die bekannte Gleichung determinirt:

$$(2.)\qquad \frac{\partial V_a}{\partial p}-\frac{\partial V_i}{\partial p} = -4\pi P.$$

Die Auffindung der Dichtigkeit ϱ läfst sich nun von einer andern Aufgabe abhängig machen, deren Auflösung den Vorzug einer unmittelbaren Verification gestattet. Man kann diese sehr einfach aussprechen, indem man sich des schon mehrfach gebrauchten Ausdrucks Potentialfunction bedient, und denselben so definirt: Potentialfunction für einen gewissen geschlossenen oder nicht geschlossenen Raum soll eine Function V heifsen, welche innerhalb dieses Raumes überall endlich und stetig ist, in jedem Punkte desselben endliche und stetige Differentialquotienten nach jeder Richtung hat, und auf rechtwinklige Coordinaten bezogen der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügt. Man hat dann zu unterscheiden, ob der Punkt A aufserhalb oder innerhalb des leitenden Körpers liegt. Sei A zuerst aufserhalb desselben, so suche man für den unendlichen Raum aufserhalb der Fläche S eine Potentialfunction v_a, die in unendlicher Entfernung von S verschwindet und in jedem Punkte B von S den Werth $\frac{1}{r}$ annimmt. Erweitert man nun die Bedeutung von r dahin, die Entfernung von A und irgend einem Punkte innerhalb des Körpers auszudrücken, so ist $\frac{1}{r}$ für das Innere desselben eine Potentialfunction, deren Werth in B mit v_a übereinstimmt. Jetzt wird die gesuchte Dichtigkeit ϱ im Punkte B durch die Gleichung

$$(3.)\qquad \frac{\partial v_a}{\partial p} - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} = -4\pi\varrho$$

bestimmt; denn ein Satz von *Dirichlet* *) lehrt, dafs eine Function, die im äufseren Raume gleich v_a und im innern Raume gleich $\frac{1}{r}$ ist, identisch sein mufs mit dem von der Belegung ϱ herrührenden Potential. Sei zweitens A ein Punkt innerhalb des Körpers, so suche man für den innern Raum desselben eine Potentialfunction v_i, die in jedem Punkte B den Werth $\frac{1}{r}$ hat. Wird nun angenommen, dafs r auch die Entfernung des Punktes A von irgend einem aufserhalb des Körpers liegenden Punkt bedeute, so ist $\frac{1}{r}$ eine Potentialfunction für den äufsern Raum, die in unendlicher Entfernung von S verschwindet und in B mit v_i zusammenfällt; mithin giebt die Anwendung derselben Schlüsse, wie oben, für ϱ die Gleichung

$$(3\,*.)\qquad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} - \frac{\partial v_i}{\partial p} = -4\pi\varrho.$$

§. 2.

Um die Aufgabe der electrodynamischen Vertheilung in einem gleichmäfsig leitenden Körper auszudrücken, behalten wir für die Oberfläche desselben die Bezeichnung S bei und nennen das Flächenelement $\partial\omega$, die in irgend einem Punkte B der Fläche von innen nach aufsen errichtete Normale p. Es sei für jeden Punkt B die nach der Stetigkeit sich ändernde Function g gegeben, die keine andere Bedingung zu erfüllen hat, als dafs das über die ganze Fläche ausgedehnte Integral $\int g\,\partial\omega$ verschwinde; dann ist für das Innere des Körpers eine Potentialfunction U_i zu suchen, deren Differentialquotient im Punkte B nach p genommen den vorgeschriebenen Werth g hat, und gleichzeitig ist für den äufsern Raum eine Potentialfunction U_a zu suchen, deren im Punkte B nach p genommener Differentialquotient ebenfalls den Werth g annimmt, und die in unendlicher Entfernung von S verschwindet. Der Zurückführung dieses Problems auf ein Fundamentalproblem sind aber einige Sätze vorauszuschicken.

---

*) Monatsbericht der Berliner Academie vom Jahre 1846, p. 211.

Herr *Kirchhof* hat nachgewiesen *), dafs durch die von ihm aufgestellten Bedingungen für die Stromvertheilung in einem System von leitenden Körpern die Ströme, oder die Differentialquotienten der electrischen Spannung in jedem Punkte nach irgend einer Richtung genommen, eindeutig bestimmt sind, dafs aber der Ausdruck für die Spannung die Hinzufügung einer beliebigen Constante erlaubt. Durch ähnliche Betrachtungen kann gezeigt werden, dafs in unserer auf *einen* Körper beschränkten und etwas anders gefafsten Aufgabe die Potentialfunction U_i bis auf eine zu addirende Constante, die Potentialfunction U_a aber vollständig determinirt ist. Auch sieht man leicht, dafs wenn eine Potentialfunction U_i denkbar sein soll, das Integral

$$\int \frac{\partial U_i}{\partial p} \partial \omega = \int g \, \partial \omega$$

gleich Null werden mufs, und deshalb ist diese Bedingung *nothwendig* für die Möglichkeit unserer Aufgabe. Dafs dieselbe indessen *ausreichend* ist, oder dafs für jede willkürliche, stetige, dieser Forderung genügende Function g eine Lösung unserer Aufgabe in der That existirt, dieser Satz bedarf eines strengen Beweises. Herr *Helmholtz* hat die electrodynamische Vertheilung, mit der wir uns beschäftigen, von der Aufsuchung einer electrischen Doppelschicht abhängig gemacht **); indem wir seinem Vorgange folgen und über diese Doppelschichten einige Betrachtungen anstellen, wird sich der gewünschte Beweis ergeben.

Es sei in jedem Punkte B der Fläche S eine Normale p errichtet und in jeder Normale in den Entfernungen $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ von der Fläche respective die electrische Masse $+\varkappa$ und $-\varkappa$ angebracht, so wird diejenige Massenvertheilung, welche entsteht, indem die Gröfse ε abnimmt und das electrische Moment $2\varepsilon\varkappa$ in den endlichen Werth N übergeht, eine electrische Doppelschicht genannt. Bezeichnet r die Entfernung des Punktes B von irgend einem beliebig gelegenen Punkte A, so hat das Potential der Wirkung dieser Doppelschicht im Punkte A den Werth $\int N \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} \partial \omega$, wo die Integration über die ganze Fläche S genommen ist; nach Herrn *Helmholtz* macht der Werth desselben beim Durchgange des Punktes A durch die Fläche einen solchen Sprung, dafs der an der äufsern Seite geltende Werth, vermindert

*) L. c. pag. 193.
**) L. c. pag. 228ff.

um den an der innern Seite geltenden gleich, dem Moment N an dieser Stelle mal der Gröfse 4π wird; der nach der Normale der Fläche genommene Differentialquotient des Potentials ändert aber seinen Werth beim Durchgange von A durch die Fläche nach der Stetigkeit. Uebrigens gelten diese Sätze nicht nur, wenn die Fläche S nach unserer Voraussetzung eine geschlossene ist, sondern auch, wenn sie es nicht ist; dagegen ist die über die ganze Fläche ausgedehnte Summe der Werthe des nach der Flächennormale genommenen Differentialquotienten des Potentials nur unter der erstern Annahme gleich Null, die in der Folge festgehalten wird. Fügt man zu diesen besondern Eigenschaften die allgemeinen Eigenschaften des Potentials, im ganzen Raume aufserhalb der Massen, mit Einschlufs seiner ersten Differentialquotienten, endlich und stetig zu sein, der *Laplace*schen Differentialgleichung zu genügen und im Unendlichen zu verschwinden, so besitzt man alle characteristischen Eigenschaften des Potentials $\int N \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} \partial\omega$, und darf folgenden Satz bilden, der dem oben angewandten Theorem von *Dirichlet* über Potentiale einfacher Flächenbelegung analog ist, und ein genau entsprechendes Beweisverfahren gestattet:

(I.) ***Wenn für eine Fläche S eine überall endliche Function N gegeben ist, so existirt nur eine einzige Function T, die im Innern des von S umschlossenen Raumes gleich einer Potentialfunction T_i, in dem ganzen die Fläche umgebenden Raume gleich einer in unendlicher Entfernung von S verschwindenden Potentialfunction T_a ist, welche Potentialfunctionen die Bedingung erfüllen, dafs bei der Annäherung an denselben Punkt der Fläche die Differenz der Werthe $T_a - T_i = 4\pi N$, die Differenz der nach der Flächennormale genommenen Differentialquotienten $\frac{\partial T_a}{\partial p} - \frac{\partial T_i}{\partial p} = 0$ wird; und diese Function T ist das Potential der Doppelbelegung von S, deren Moment N ist.***

Dirichlet zeigte in seinen Vorlesungen über die Theorie der Kräfte, die nach dem *Newton*schen Gesetze wirken, dafs eine im Unendlichen verschwindende Potentialfunction T_a stets so beschaffen ist, dafs, wenn c die Entfernung eines festen Punktes von demjenigen Punkte bedeutet, auf den T_a bezogen wird, die Ausdrücke cT_a und $c^2\frac{\partial T_a}{\partial c}$ nicht zunehmen, sobald die

Gröfse c über jede Grenze wächst. Hierdurch wurde der Nachweis des Theorems über Flächenpotentiale auf ähnliche Betrachtungen zurückgeführt, wie diejenigen, welche man für den Satz über Potentiale von Massen, die nach drei Dimensionen ausgedehnt sind, in einer Abhandlung dieses Journals vollständig dargestellt findet*). Das analytische Factum, wovon dort der ganze Nachweis abhängt, läfst sich in den von uns angewandten Zeichen so aussprechen, dafs die Function T im ganzen Raume verschwinden mufs, sobald bei den in unserem Satze aufgestellten Bedingungen N für die ganze Fläche gleich Null gesetzt wird; und dies Factum enthält zugleich die Begründung dafür, dafs wenn N nicht Null ist, es nur eine Function T giebt. Da ferner das Potential $\int N \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} \partial\omega$ die sämmtlichen geforderten Eigenschaften besitzt, so ist dasselbe mit der Function T identisch.

Kehren wir jetzt zu der Aufgabe zurück, die Functionen U_a und U_i so zu bestimmen, dafs $\frac{\partial U_a}{\partial p} = \frac{\partial U_i}{\partial p} = g$ wird, und denken uns dieselbe gelöst, bestimmen wir ferner eine Gröfse $\varDelta$ durch Vergleichung der Werthe von U_a und U_i für denselben Punkt B in S vermittelst der Relation $U_a - U_i = 4\pi\varDelta$, und nehmen für die Fläche S eine electrische Doppelbelegung an, deren Moment im Punkte B gleich $\varDelta$ ist, so erfüllt die Function U, die im äussern Raume $= U_a$, im innern Raume $= U_i$ ist, die characteristischen Bedingungen des Satzes (I.) und ist folglich gleich dem Potential der Doppelschicht $\varDelta$ für jeden Punkt des Raumes. Deshalb kann unserer Aufgabe die folgende substituirt werden: ***Für die Fläche S eine Doppelbelegung anzugeben, deren Potential U in jedem Punkt der Fläche die Gleichung*** $\frac{\partial U}{\partial p} = g$ ***befriedigt;*** und ist diese gelöst, so wird das Potential für einen Punkt im äufsern Raume mit U_a, das Potential für einen Punkt im innern Raume mit U_i identisch sein. Nach einer frühern Bemerkung gestattet die Potentialfunction U_i die Hinzufügung einer beliebigen Constante, so dafs aus einer gefundenen Lösung der Aufgabe durch die Potentialfunctionen U_a, U_i eine neue Lösung mit den Functionen U_a, $U_i + K$ erhalten wird. Demgemäfs erfährt die Gröfse $\varDelta$ einen Zuwachs um $-\frac{K}{4\pi}$, und das Integral $\int \varDelta \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} \partial\omega$ um $-\frac{K}{4\pi}\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} \partial\omega$, einen Werth, der (zufolge des

*) Bd. XXXII, pag. 80.

Satzes (I.)) für Punkte innerhalb der Fläche S gleich K, für Punkte aufserhalb der Fläche gleich Null sein mufs; und dies wird durch einen Satz von *Gaufs* über die Werthe des Integrals $\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} \partial\omega$ bestätigt*). Da also auch die Gröfse Δ immer die Addition einer Constante erlaubt, so kann man, um dieselbe zu bestimmen, dem Integral $\int \Delta\, \partial\omega$ einen festen Werth vorschreiben. Unter dieser Beschränkung wird bewiesen werden, dafs immer eine Doppelbelegung der Fläche S existirt, deren Potential U die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial p} = g$ erfüllt, und damit ist dann die Existenz der gesuchten Potentialfunctionen U_a und U_i aufser Frage gestellt. Vorher haben wir aber das folgende Theorem zu erweisen, das auf der Vergleichung von zwei Doppelbelegungen beruht:

(II.) *Es seien ν und N die Momente von zwei Doppelbelegungen der Fläche S, deren Potentiale respective t und T sein mögen, so gilt diese Gleichung zwischen zwei über die ganze Fläche ausgedehnten Integralen*

$$\int \nu \frac{\partial T}{\partial p} \partial\omega = \int N \frac{\partial t}{\partial p} \partial\omega.$$

Wir betrachten nun einen geschlossenen Raum, innerhalb dessen die Functionen T und t sammt ihren Differentialquotienten endlich und stetig sind, nennen das Element des Raumes $\partial\zeta$, das Element der begrenzenden Fläche $\partial\eta$, das Element der von innen nach aufsen geführten Flächennormale ∂q, beziehn T und t auf die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, und bilden die unter dem Namen des *Green*schen Satzes bekannte Gleichung

$$(4.)\quad \int T\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right)\partial\zeta$$
$$= -\int\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial z}\right)\partial\zeta + \int T \frac{\partial t}{\partial q}\partial\eta,$$

wo die Integration nach $\partial\zeta$ auf den ganzen in Rede stehenden Raum, die Integration nach $\partial\eta$ auf die ganze Begrenzungsfläche geht. Diese Gleichung rührt allerdings von *Green* her; aber es läfst sich nicht verkennen, dafs der Keim derselben schon in der *Gaufs*ischen Abhandlung „Theoria attractionis corp. sphaer. ellipt." vom Jahre 1813 enthalten ist. Von der Gleichung (4.) wird nun eine doppelte Anwendung gemacht, erstens, indem man den innerhalb der Fläche S befindlichen Raum als den Raum der Integration nimmt,

*) Theoria attract. corp. sphaer. ellipt. art. 6.

zweitens, indem man um einen innerhalb der Fläche liegenden festen Punkt eine Kugel mit dem Radius c beschreibt, welche die Fläche S ganz umschliefst, und den durch die Kugelfläche und die Fläche S begrenzten Raum als den Raum der Integration auffafst. Im ersten Falle ist in (4.) das Element $\partial\eta$ durch $\partial\omega$, ∂q durch ∂p zu ersetzen, im zweiten Falle geht das nach $\partial\eta$ genommene Integral in eine Summe von zwei Integralen über, von denen sich das eine auf S, das andere auf die Kugel bezieht. Um das letztere Integral auszudrücken, sei $\partial\sigma$ das Element der Kugelfläche vom Radius 1, dann ist bei der vorliegenden Kugel das Flächenelement $= c^2\partial\sigma$, und ∂q wird gleich ∂c. Dagegen ist bei dem auf S bezüglichen Theile des Flächenintegrals $\partial\eta$ durch $\partial\omega$, ∂q durch $-\partial p$ zu ersetzen. Da die linke Seite der Gleichung (4.) streng gleich Null ist, so kommen den beiden Fällen gemäfs diese Relationen:

$$(4^a.)\quad \int\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial z}\Big)\partial\zeta=\int T_i\frac{\partial t_i}{\partial p}\partial\omega,$$

$$(4^b.)\quad \int\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial z}\Big)\partial\zeta=-\int T_a\frac{\partial t_a}{\partial p}\partial\omega+\int T\frac{\partial t}{\partial c}c^2\partial\sigma,$$

wo für T respective T_a und T_i geschrieben ist, um die zu beiden Seiten von S herrschenden Werthe des Potentials anzudeuten. Die zweite dieser Gleichungen wird vereinfacht durch die Annahme, dafs der Werth c über jede Grenze hinaus wächst; denn da nach einem schon früher erwähnten Hülfssatze jede im Unendlichen verschwindende Potentialfunction T, t die Eigenschaft hat, dafs die Gröfsen cT, $c^2\frac{\partial T}{\partial c}$, ct, $c^2\frac{\partial t}{\partial c}$ mit wachsendem c gewisse feste Werthe numerisch nicht überschreiten, so ist das Integral $\int T\frac{\partial t}{\partial c}c^2\partial\sigma$ numerisch kleiner als eine endliche Constante mal dem Integral $\int\frac{\partial\sigma}{c}=\frac{4\pi}{c}$, dessen Werth mit zunehmendem c sich der Null nähert. Also geht die Gleichung (4^b.), wenn man den Kugelradius c gröfser werden läfst als ein noch so grofser gegebener Werth, in die folgende über:

$$(4^c.)\quad \lim.\int\Big(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial t}{\partial z}\Big)\partial\zeta=-\int T_a\frac{\partial t_a}{\partial p}\partial\omega,$$

deren rechte Seite ein von c unabhängiger und stets endlicher Integralausdruck ist. Man hat jetzt zu beachten, dafs die Potentiale T und t in der Gleichung (4.) mit einander vertauscht werden können, und ebenso auch in den Gleichungen (4^a.), (4^c.), die aus jener folgen; da aber die Aus-

drücke der linken Seite in diesen nach T und t symmetrisch sind, so folgt daraus

$$(5.)\quad \int T_i \frac{\partial t_i}{\partial p}\partial\omega = \int t_i \frac{\partial T_i}{\partial p}\partial\omega,$$

$$(5^*.)\quad \int T_a \frac{\partial t_a}{\partial p}\partial\omega = \int t_a \frac{\partial T_a}{\partial p}\partial\omega,$$

und die Subtraction der ersten von der zweiten Gleichung giebt, da

$$T_a - T_i = 4\pi N,\quad \frac{\partial T_a}{\partial p} - \frac{\partial T_i}{\partial p} = 0,\quad t_a - t_i = 4\pi\nu,\quad \frac{\partial t_a}{\partial p} - \frac{\partial t_i}{\partial p} = 0$$

ist, das oben ausgesprochene Resultat

$$\int N \frac{\partial t}{\partial p}\partial\omega = \int \nu \frac{\partial T}{\partial p}\partial\omega.$$

Der Nachweis des vorhin aufgestellten Satzes, dafs stets eine Doppelbelegung der Fläche S existirt, deren Potential U die Bedingung $\frac{\partial U}{\partial p} = g$ befriedigt, und für deren Moment $\varDelta$ das Integral $\int \varDelta \partial\omega$ einen gegebenen Werth hat, kann jetzt derjenigen Untersuchung nachgebildet werden, durch welche *Gaufs* den mehrfach angeführten Satz begründet hat, dafs stets eine einfache Belegung der Fläche S existirt, deren Potential in jedem Punkte von S gleich dem willkürlich gegebenen, sich stetig ändernden Werthe f wird. Demgemäfs fassen wir zuerst solche Doppelbelegungen in's Auge, bei denen das Moment $\varDelta$ an keiner Stelle von S einen Wechsel des Vorzeichens zeigt, und bilden für irgend eine Doppelbelegung dieser Art, bei der $\int \varDelta \partial\omega$ den gegebenen Werth hat und deren Potential U sein mag, das über die ganze Fläche auszudehnende Integral

$$\Omega = \int \left(-\frac{\partial U}{\partial p} + 2g\right)\varDelta \partial\omega.$$

Um sich zu überzeugen, dafs dasselbe für *eine* Vertheilungsart der Werthe $\varDelta$ einen Minimumwerth haben mufs, genügt die Erwägung, dafs das Integral $-\int \frac{\partial U}{\partial p}\varDelta \partial\omega$ niemals einen negativen Werth annehmen kann. Dies folgt aus den Gleichungen (4^a.) und (4^c.), wenn man sowohl die Doppelbelegung N als die Doppelbelegung ν gleich $\varDelta$ setzt, und dadurch T und t in U übergehn läfst. Hiermit erhält man die Gleichungen

$$\int \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right)\partial\zeta = \int U_i \frac{\partial U_i}{\partial p}\partial\omega,$$

$$\lim.\int \left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right)\partial\zeta = -\int U_a \frac{\partial U_a}{\partial p}\partial\omega,$$

wo die erste Raumintegration auf den innern Raum der Fläche S, die zweite auf den Raum einer die Fläche S umgebenden Kugel mit Ausschlufs jenes innern Raumes zu beziehen ist, der Kugelradius c aber wachsend gedacht wird. Addirt man diese Gleichungen zu einander, so kommt

$$\lim.\int\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right)\partial\zeta=\int\left(U_i\frac{\partial U_i}{\partial p}-U_a\frac{\partial U_a}{\partial p}\right)\partial\omega;$$

die Integration linker Hand geht jetzt auf den ganzen Raum der Kugel vom Radius c; auf der rechten Seite aber hat man, weil

$$\frac{\partial U_i}{\partial p}=\frac{\partial U_a}{\partial p},\qquad U_i-U_a=-4\pi\Lambda$$

ist, das Integral $-4\pi\int\frac{\partial U}{\partial p}\Lambda\partial\omega$. Mithin ist dasselbe gleich einer Summe von nur positiven Elementen und kann niemals einen negativen Werth haben: die Annahme, dafs es streng gleich Null wird, ist später zu erörtern. Uebrigens bemerkt man, dafs diese Eigenschaft des Integrals $\int-\frac{\partial U}{\partial p}\Lambda\partial\omega$ nicht an die Voraussetzung gebunden ist, dafs Λ sein Zeichen nirgend ändere; dagegen bleibt der andere Theil des Integrals Ω, nämlich $\int g\Lambda\partial\omega$, nur unter dieser Voraussetzung in feste endliche Grenzen eingeschlossen. Nach dem Vorgange von *Gaufs* ist nun zu zeigen, dafs bei der Vertheilung, die dem Minimum von Ω entspricht, die Differenz $\left(-\frac{\partial U}{\partial p}+g\right)$ in allen wirklich belegten Theilen von S einen constanten Werth hat, und dafs, falls Theile der Fläche dabei unbelegt bleiben, diese Differenz nicht kleiner sein kann, als jener constante Werth. Zu diesem Zwecke ist die Variation von Ω zu bilden, welche entsteht, indem man statt der Vertheilung Λ eine unendlich wenig davon verschiedene Vertheilung setzt, deren Moment $\Lambda+\delta\Lambda$ sein mag. Das Potential U geht dann in $U+\delta U$ über, und man hat

$$\delta\Omega=-\int\frac{\partial\delta U}{\partial p}\Lambda\partial\omega+\int\left(-\frac{\partial U}{\partial p}+2g\right)\delta\Lambda\partial\omega;$$

hier ist $\int\frac{\partial\delta U}{\partial p}\Lambda\partial\omega=\int\frac{\partial U}{\partial p}\delta\Lambda\partial\omega$, da es offenbar freisteht, in dem Satze (II.) für die Gröfsen N, ν, T, t respective Λ, $\delta\Lambda$, U, δU zu setzen, und dadurch wird der Ausdruck für $\delta\Omega$ der folgende:

$$\delta\Omega=2\int\left(-\frac{\partial U}{\partial p}+g\right)\delta\Lambda\partial\omega.$$

Aus dieser Form der Variation folgt aber mittelst derselben Schlüsse, die *Gaufs* angewandt hat, die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung über den



Werth der Differenz $-\frac{\partial U}{\partial p}+g$. Um für die Voraussetzung, dafs $\varLambda$ positive und negative Werthe haben darf, die Thatsache zu beweisen, dafs eine Vertheilung existirt, bei der die Differenz $-\frac{\partial U}{\partial p}+g$ überall in der Fläche einen constanten Werth hat, und kein endliches Stück der Fläche leer bleibt, hat man für den besondern Fall der behandelten Frage, dafs $g=0$ ist, und das Integral $-\int\frac{\partial U}{\partial p}\varLambda\,\partial\omega$ selbst ein Minimum werden soll, zu zeigen, dafs kein Theil der Fläche unbelegt bleiben kann, sobald dies Integral ein Minimum ist. Der kleinste Werth, den dasselbe möglicher Weise haben kann, ist die Null; doch weifs man a priori nicht, ob die gestellten Bedingungen dies gestatten. Macht man die Hypothese, dafs das Integral $-\int\frac{\partial U}{\partial p}\varLambda\,\partial\omega$ gleich Null sei, so folgt aus dem Ausdruck desselben als Raumintegral, dafs die Gröfse $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$ im ganzen Raume verschwinden mufs, mithin auch $\frac{\partial U}{\partial x}=0$, $\frac{\partial U}{\partial y}=0$, $\frac{\partial U}{\partial z}=0$ ist. Da nun das Potential U nur an der Fläche S unstetig werden darf, und im Unendlichen verschwinden mufs, so kann dasselbe aufserhalb S nur gleich Null, innerhalb S gleich einer Constante k sein. Nach dem Satze (I.) hätte man also eine Function T, die im äufsern Raume gleich der Potentialfunction 0, im innern Raume gleich der Potentialfunction k ist, und die folglich das Potential der Doppelbelegung vom Moment $-\frac{k}{4\pi}$ wäre. Wird daher die Constante k so gewählt, dafs das Integral $-\int\frac{k}{4\pi}\,\partial\omega$ den für $\int\varLambda\,\partial\omega$ vorgeschriebenen Werth annimmt, so hat man die Doppelbelegung, durch welche $\int-\frac{\partial U}{\partial p}\varLambda\,\partial\omega$ den Minimumwerth Null erhält, und bei der $\varLambda$ für die ganze Fläche den constanten Werth $-\frac{k}{4\pi}=L_0$ annimmt; mithin ist das Leerbleiben eines Theiles der Fläche für die ihr Zeichen nirgend wechselnde Belegung ausgeschlossen. Nun giebt es nach dem Frühern stets eine Vertheilung, deren Moment L sein Zeichen nicht ändert, die dem Integral $\int L\,\partial\omega$ den vorgeschriebenen Werth giebt, und das Integral $\int\left(-\frac{\partial U}{\partial p}+2\varepsilon g\right)L\,\partial\omega$ zu einem Minimum macht, wo ε einen constanten Coefficienten bedeutet. Denkt man sich dieselbe gefunden, dann lehrt die *Gaufs*ische Betrachtung, dafs bei einer neuen Vertheilung, deren Moment $\varLambda=\frac{L-L_0}{\varepsilon}+L_0$ ist, und bei der $\int\varLambda\,\partial\omega$ gleich dem gegebenen $\int L_0\,\partial\omega$ ist, für ein unendlich abnehmendes ε kein Theil der Fläche leer bleibt, und

die Differenz $-\frac{\partial U}{\partial p}+g$ in der ganzen Fläche einen constanten Werth hat. Es zeigt sich nun unmittelbar, dafs der constante Werth der Differenz $-\frac{\partial U}{\partial p}+g$ hier die Null ist, denn gesetzt er sei gleich C, so mufs $\int\left(-\frac{\partial U}{\partial p}+g\right)\partial\omega = C\int\partial\omega$ sein, und weil $\int\frac{\partial U}{\partial p}\partial\omega = 0$, $\int g\,\partial\omega = 0$ ist, auch $C\int\partial\omega = 0$ und daher C selbst gleich 0. Mithin ist vollständig erwiesen, dafs es stets eine Doppelbelegung Λ giebt, deren Potential U die Relation $\frac{\partial U}{\partial p}=g$ erfüllt, und für welche $\int\Lambda\,\partial\omega$ einen gegebenen Werth hat; auch sieht man leicht, dafs nur *eine* solche existirt.

Die Reduction des allgemeinen electrodynamischen Problems vermittelt sich jetzt in folgender Weise, indem zwischen den Functionen U_a und U_i unterschieden wird: Es sei zuerst A ein fester Punkt, der aufserhalb der Fläche S liegt, r die Entfernung zwischen A und jedem Punkte der Fläche B, so hat man die Fundamentalaufgabe, für S eine Doppelschicht zu construiren, so dafs der Differentialquotient des zugehörenden Potentials u im Punkte B nach p genommen den Werth $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$ hat, und das electrische Moment dieser Belegung heifse λ. Der Werth $\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$ ist hier deshalb zulässig, weil nach einem oben angeführten Satze das Integral $\int\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\partial\omega$ gleich Null ist, so lange der Punkt A aufserhalb S liegt. Die gesuchte Potentialfunction U_a für den Punkt A ist dann durch dies Integral bestimmt:

$$(6.)\qquad U_a = \int g\lambda\,\partial\omega,$$

und die Richtigkeit dieser Gleichung folgt aus dem Satze (II.), indem statt der Ausdrücke N, ν, T, t die Gröfsen Λ, λ, U, u substituirt werden; denn es steht fest, dafs die in Rede stehenden Doppelbelegungen Λ und λ, welche $\frac{\partial u}{\partial p}=\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$, $\frac{\partial U}{\partial p}=g$ geben, in der That existiren. So verwandelt sich die Gleichung (II.) in die folgende:

$$\int \varLambda \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\partial\omega = \int \lambda g\,\partial\omega,$$

deren linke Seite das Potential der Doppelschicht $\varLambda$ im Punkte A, das ist U_a, ausdrückt. Zur Determination des Moments λ bedarf es nun der Aufsuchung derjenigen Potentialfunction u_a für den die Fläche S umschliefsenden unendlichen Raum, die in unendlicher Entfernung von S Null wird, und im Punkte B die Gleichung $\frac{\partial u_a}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}$ erfüllt. Denn bezeichnet r wieder die Entfernung des Punktes A von irgend einem Punkte innerhalb S, so ist für den innern Raum offenbar die Gröfse $\frac{1}{r}$ eine Potentialfunction, deren Differentialquotient nach p den genannten Werth hat. Man bestimmt nun das Moment λ aus der Differenz der Werthe u_a und $\frac{1}{r}$ für jeden Punkt B durch die Gleichung

$$(7.)\qquad u_a - \frac{1}{r} = 4\pi\lambda,$$

und es folgt aus dem Satze (I.), dafs das Potential der Doppelschicht λ im äufsern Raume mit u_a, im innern mit $\frac{1}{r}$ coincidirt, und dafs mithin λ das gesuchte Moment ist.

Sei zweitens der Punkt A innerhalb S gelegen, so besteht die Fundamentalaufgabe für die Bestimmung von U_i darin, eine Doppelbelegung λ zu suchen, deren Potential u im Punkte B der Bedingung $\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} + \frac{\partial \chi}{\partial p}$ genügt; die Gröfse χ soll sogleich definirt werden. Es sei ψ diejenige Potentialfunction für den die Fläche S umgebenden Raum, die im Unendlichen verschwindet und in S einen constanten Werth gleich der Einheit hat; dann habe das Integral $\int \frac{\partial \psi}{\partial p}\partial\omega$, welches niemals Null sein kann, den Werth h, und man setze $\frac{4\pi}{h}\psi = \chi$. Da $\int \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p}\partial\omega$ für einen inneren Punkt A den Werth -4π hat, so ist die Bedingung $\int \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} + \frac{\partial \chi}{\partial p}\right)\partial\omega = 0$ erfüllt, und es giebt stets eine Belegung λ von der verlangten Beschaffenheit. Bedeutet u_i die Potentialfunction für den inneren Raum der Fläche, die in S der Gleichung

$\frac{\partial u_i}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} + \frac{\partial \chi}{\partial p}$ genügt, so ist $\frac{1}{r} + \chi$ die Potentialfunction u_a für den äufsern Raum, bei welcher $\frac{\partial u_a}{\partial p}$ denselben Werth hat und die in unendlicher Entfernung von S verschwindet, und das Moment λ wird nach dem Satze (I.) durch die Gleichung

$$(7^*.) \quad \frac{1}{r} + \chi - u_i = \lambda$$

für jeden Punkt B der Fläche bestimmt. Die Anwendung des Satzes (II.) auf die Doppelschichten λ und $\varLambda$ führt jetzt zu der Gleichung

$$\int \varLambda \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial p} + \frac{\partial \chi}{\partial p} \right) \partial\omega = U_i + \frac{1}{4\pi} \int (U_a - U_i) \frac{\partial \chi}{\partial p} \partial\omega$$
$$= \int \lambda g \, \partial\omega.$$

Aus der Gleichung (5*.) ist leicht zu folgern, dafs

$$\int U_a \frac{\partial \chi}{\partial p} \partial\omega = \int \frac{\partial U_a}{\partial p} \chi \, \partial\omega = 0$$

ist, da χ für die Fläche S den constanten Werth $\frac{4\pi}{h}$ hat; bestimmt man daher die in U_i enthaltene beliebige Constante durch die Gleichung

$$\int U_i \frac{\partial \chi}{\partial p} \partial\omega = 0,$$

so kommt für U_i die Darstellung

$$(8.) \quad U_i = \int g \lambda \, \partial\omega,$$

welche dem Ausdruck für U_a genau entspricht. Nachdem jetzt die Functionen U_a und U_i gefunden sind, kann das Moment $\varLambda$ der entsprechenden Doppelschicht im Punkte B durch die Gleichung

$$(9.) \quad U_a - U_i = 4\pi \varLambda$$

abgeleitet werden.

Es möge erlaubt sein, zum Schlufs dieser allgemeinen Betrachtungen auf die Modificationen derselben hinzuweisen, welche der Annahme entsprechen, dafs die Fläche S keinen körperlichen Raum einschliefst. Die Aenderungen, welche dadurch in der Theorie der *electrostatischen Vertheilung* herbeigeführt werden, sind in der häufig angeführten *Gaufs*ischen Abhandlung erwähnt. In Bezug auf die *electrodynamische Vertheilung* ist aber zu bemerken, dafs die Ersetzung der Einströmungspunkte der Electricität in den Leiter durch einfache electrische

Massenpunkte, wie dies oben geschah, nur zulässig ist, so lange derselbe ein Körper von drei Dimensionen bleibt. Mithin behält nur diejenige Auffassung unserer Aufgabe eine Bedeutung, bei der der unendliche Raum als leitend, die nicht geschlossene Fläche S als eine unendlich dünne nicht leitende Einschaltung betrachtet wird. Dann handelt es sich nur um eine im Unendlichen verschwindende Potentialfunction für den äufseren Raum, deren Differentialquotient nach der Normale der Fläche einen vorgeschriebenen Werth g in jedem Punkte derselben annehmen soll und die durch diese Forderung vollständig bestimmt ist; ferner hat die Function g nicht mehr die Bedingung $\int g\,\partial\omega = 0$ zu erfüllen, sondern kann ganz willkürlich gegeben sein, sobald nur die Stetigkeit nirgend verletzt wird. Man sieht dies sehr deutlich, wenn man von der Voraussetzung, dafs die Fläche S einen sehr kleinen Raum einschliefse, zum Verschwinden desselben übergeht, und erkennt gleichfalls, dafs die Aufgabe immer lösbar bleiben mufs. Die Eigenschaften des Potentials U einer Doppelschicht hängen nach einer früheren Bemerkung nicht davon ab, dafs die belegte Fläche geschlossen ist, mit Ausnahme der einen, dafs das Integral $\int \frac{\partial U}{\partial p}\,\partial\omega$ gleich Null ist, und es erscheint unnöthig auf die einzelnen Sätze, die zur Reduction des allgemeinen Problems auf ein Fundamentalproblem dienen, einzugehen, da die erforderlichen Aenderungen nur die Bezeichnungsweise betreffen. Will man aber den Beweis der Existenz einer Doppelbelegung Λ, deren Potential U für S die Gleichung $\frac{\partial U}{\partial p} = g$ befriedigt, so führen, dafs man von vorn herein S als nicht geschlossen ansieht, so müssen wesentliche Modificationen eintreten, von deren Ausführung wir der Kürze halber abstehen.

§. 3.

Indem wir die im Vorstehenden characterisirten Fundamentalaufgaben für den Fall behandeln, dafs die den Leiter begrenzende Fläche ein Rotationsellipsoid ist, werden wir uns den von Herrn *Neumann* in der angeführten Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen anschliefsen und mehrfach auf die Resultate derselben verweisen. Der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten, die zunächst zur Ortsbestimmung dienen sollen, sei der Mittelpunkt des gegebenen Rotationsellipsoids, so dafs die Rotationsaxe die z-Axe wird, und die Axen der x und y in die Aequatorialebene fallen;

die Rotationsaxe sei 2Γ, die Aequatorialaxe $2A$; dann ist die Differenz $A^2-\Gamma^2$ positiv oder negativ, je nachdem das Rotationsellipsoid abgeplattet oder verlängert ist, und in der Gleichung $A^2-\Gamma^2=c^2$ soll c im ersten Falle eine positive Gröfse, im zweiten Falle eine positive Gröfse mal der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ oder i bedeuten. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z werden jetzt durch sogenannte elliptische Coordinaten σ, μ, φ ausgedrückt mittelst der Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} x = c\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi, \\ y = c\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi, \\ z = \frac{c}{i}\sigma\mu. \end{cases}$$

Hier bedeutet σ, wenn das Ellipsoid abgeplattet, also c reell ist, eine positive Gröfse mit i multiplicirt, während $\sqrt{1-\sigma^2}$ reell und positiv ist; dagegen bedeutet σ, wenn das Ellipsoid ein verlängertes und folglich c imaginär ist, eine positive die Einheit übertreffende Gröfse, während $\sqrt{1-\sigma^2}$ gleich einer positiven Gröfse dividirt durch i wird. Die Gröfse μ durchläuft alle Werthe von $\mu=-1$ bis $\mu=+1$, indem $\sqrt{1-\mu^2}$ positiv bleibt, und der Winkel φ geht durch die ganze Peripherie von $\varphi=-\pi$ bis $\varphi=+\pi$. Für die gegebene Fläche ist der constante Werth von σ, der σ_0 heifsen soll, durch die Gleichung $\sigma_0=\frac{i}{c}\Gamma$ bestimmt, und man sieht, dafs die Voraussetzung $\sigma_0=0$ dem Uebergang des abgeplatteten Ellipsoids in eine Kreisebene vom Radius c, die Voraussetzung $\sigma_0=1$ dem Uebergang des verlängerten Ellipsoids in eine gerade Linie von der Länge $\frac{c}{i}$ entspricht. Auch erkennt man leicht die Nothwendigkeit, der Gröfse σ, wenn c reell ist, alle rein imaginären Werthe von 0 bis ∞, und wenn c imaginär ist, alle reellen Werthe von $+1$ bis $+\infty$ beizulegen, um durch die elliptischen Coordinaten jeden Punkt des Raumes, und zwar jeden nur auf *eine* Weise, zu fixiren. Das Mittel, durch welches die Lösung unserer Aufgaben unmittelbar herbeigeführt wird, ist die von Herrn *Neumann* gegebene Entwickelung der in elliptischen Coordinaten ausgedrückten reciproken Entfernung zweier Punkte in eine nach den *Laplace*schen Kugelfunctionen fortschreitende Reihe. Die Coordinaten dieser beiden Punkte seien σ, μ, φ und σ', μ', φ', dann ist ihre Entfernung von einander gleich dem Ausdruck

$$(11.)\quad c\sqrt{\{2-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2-\mu'^2+2\sigma\sigma'\mu\mu'-2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi-\varphi')\}}=c\sqrt{N},$$

und bei der Entwickelung von $\frac{1}{c\sqrt{N}}$ wird angenommen, dafs $\frac{\sigma'}{i} > \frac{\sigma}{i}$ sei, oder dafs das durch den Punkt (σ, μ, φ) gelegte mit dem gegebenen confocale Ellipsoid von dem durch den Punkt $(\sigma', \mu', \varphi')$ ebenso gelegten Ellipsoid umschlossen werde. Die betreffende Reihe ist aus den Particularlösungen der Differentialgleichung

$$(12.)\quad \frac{d(1-\mu^2)\frac{dS}{d\mu}}{d\mu} + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)S = 0$$

zusammengesetzt, wo n und m alle positiven ganzen Zahlen von Null an bedeuten; die eine Gattung dieser particularen Integrale wird so bestimmt:

$$(13.)\begin{cases} P_{n.0}(\mu) = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}\left(\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right), \\ P_{n.m}(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_{n.0}(\mu)}{d\mu^m}, \end{cases}$$

und die zweite Gattung, welche nach Einführung des Buchstaben σ für μ durch $Q_{n.m}(\sigma)$ bezeichnet werden soll und die Eigenschaft hat, für $\sigma = \infty$ zu verschwinden, kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$(14.)\quad \begin{cases} Q_{n.0}(\sigma) = \int_{-1}^{+1}\frac{P_{n.0}(\mu)}{\sigma-\mu}\partial\mu = R_n(\sigma) - P_{n.0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}, \\ Q_{n.m}(\sigma) = (1-\sigma^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}, \end{cases}$$

wo $R_n(\sigma)$ die Summe derjenigen Glieder in der Entwickelung von $P_{n.0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ nach Potenzen von $\frac{1}{\sigma}$ bedeutet, die für $\sigma = \infty$ nicht verschwinden. Wenn σ imaginär, also is ist, hat man den Ausdruck $\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ durch $2i\,\mathrm{arctg}\frac{1}{s}$ zu ersetzen, und den Bogen zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ zu nehmen. Die reciproke Entfernung der Punkte (σ, μ, φ) und $(\sigma', \mu', \varphi')$ giebt nun diese Entwickelung:

$$(15.)\ \frac{1}{c\sqrt{N}} = \frac{i}{c}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\sum_{m=0}^{m=n} b_{n.m}^2 P_{n.m}(\sigma)Q_{n.m}(\sigma')P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

wo $b_{n.m} = \frac{1}{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+m-1)(n+m)}$, $b_{n.0} = 1$, und zu den Gliedern, für die $m = 0$ ist, noch der Factor $\frac{1}{2}$ hinzutreten mufs. Dasselbe gilt für alle Doppelreihen, die im Folgenden vorkommen. Das allgemeine Glied dieser Doppelreihe ist eine Potentialfunction sowohl in Bezug auf den Punkt (σ, μ, φ) als in Bezug auf den Punkt $(\sigma', \mu', \varphi')$, und zwar sind die

Ausdrücke $P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \cos m\varphi$ und $P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \sin m\varphi$ Potentialfunctionen für den innern Raum eines gewissen Ellipsoids, das einem constanten Werth von σ entspricht, und die Ausdrücke $Q_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \cos m\varphi$ und $Q_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\mu) \sin m\varphi$ sind Potentialfunctionen für den äufsern Raum, der ein solches Ellipsoid umschliefst, und verschwinden in unendlicher Entfernung von demselben.

Bei der ersten und bei der zweiten Fundamentalaufgabe seien die Coordinaten des festen Punktes A durch σ', μ', φ' bezeichnet, wenn derselbe aufserhalb der gegebenen Fläche liegt, d. i. wenn $\frac{\sigma'}{i} > \frac{\sigma_0}{i}$ ist, und durch σ_1, μ_1, φ_1, wenn derselbe innerhalb der gegebenen Fläche liegt, d. i., wenn $\frac{\sigma'}{i} < \frac{\sigma_0}{i}$ ist; dagegen soll der Punkt, auf den die gesuchten Potentialfunctionen bezogen werden, die Coordinaten σ, μ, φ haben. Zunächst ist also für die electrostatische Aufgabe diejenige Potentialfunction v_a für den äufsern Raum zu bestimmen, die im Unendlichen verschwindet und für $\sigma = \sigma_0$ gleich der reciproken Entfernung der Punkte $(\sigma', \mu', \varphi')$ und (σ, μ, φ) wird, und es kommt der Ausdruck (16.)

$$v_a = \frac{i}{c} \sum_0^\infty (2n+1) \sum_0^n b^2_{n.m} \frac{P_{n.m}(\sigma_0)}{Q_{n.m}(\sigma_0)} Q_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma') P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi').$$

Um vermöge der Gleichung (3.) die Dichtigkeit ϱ der entsprechenden Belegung zu bilden, ist zu beachten, dafs eine Derivation nach der Flächennormale nur die Variable σ berührt, und dafs das Element der Normale $dp = \frac{c}{i} \frac{\sqrt{\mu^2 - \sigma^2}}{\sqrt{1-\sigma^2}} d\sigma$ ist; ferner wird die Reihe für ϱ vereinfacht durch die bekannte Relation zwischen den particularen Integralen der Differentialgleichung (12.)

$$(17.) \quad \left(P_{n.m}(\sigma) \frac{dQ_{n.m}(\sigma)}{d\sigma} - Q_{n.m}(\sigma) \frac{dP_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}\right)(1-\sigma^2) = \frac{2}{b_{n.m}},$$

wo der Werth der Constante rechter Hand aus besondern Werthen der linken Seite leicht zu verificiren ist. Demnach findet man den Werth

$$(18.) \quad \varrho = \frac{1}{2\pi c^2 \sqrt{\mu^2 - \sigma_0^2} \sqrt{1-\sigma_0^2}} \sum_0^\infty (2n+1) \sum_0^n b_{n.m} \frac{Q_{n.m}(\sigma')}{Q_{n.m}(\sigma_0)} P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

und die Coordinaten μ, φ bezeichnen den Punkt B auf der gegebenen Fläche.

Man hat nun zweitens die Potentialfunction v_i für den innern Raum des Ellipsoids anzugeben, die an der Oberfläche desselben sich auf die re-

ciproke Entfernung der Punkte $(\sigma_1, \mu_1, \varphi_1)$ und (σ_0, μ, φ) reducirt. Diese wird

$$(19.)\quad v_i = \frac{i}{c}\sum_0^\infty (2n+1)\sum_0^n b_{n.m}^2 \frac{Q_{n.m}(\sigma_0)}{P_{n.m}(\sigma_0)} P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1)\cos m(\varphi-\varphi_1),$$

und giebt nach der Gleichung (3*.) diesen Werth für die Belegung ϱ im Punkte (μ, φ):

$$(20.)\quad \varrho = \frac{1}{2\pi c^2\sqrt{\mu^2-\sigma_0^2}\sqrt{1-\sigma_0^2}}\sum_0^\infty (2n+1)\sum_0^n b_{n.m}\frac{P_{n.m}(\sigma_1)}{P_{n.m}(\sigma_0)} P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1)\cos m(\varphi-\varphi_1).$$

Für die electrodynamische Aufgabe verlangt man erstens diejenige Potentialfunction u_a im äufsern Raume, die in unendlicher Entfernung von der Ellipsoidfläche verschwindet, und deren Differentialquotient nach der Flächennormale gleich demselben Differentialquotienten der reciproken Entfernung der Punkte $(\sigma', \mu', \varphi')$ und (σ, μ, φ) wird, und findet

$$(21.)\quad u_a = \frac{i}{c}\sum_1^\infty (2n+1)\sum_0^n b_{n.m}^2 \frac{P'_{n.m}(\sigma_0)}{Q'_{n.m}(\sigma_0)} Q_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma') P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'),$$

wo der Kürze halber die Differentialquotienten der Gröfsen $P_{n.m}(\sigma)$, $Q_{n.m}(\sigma)$ nach σ genommen durch $P'_{n.m}(\sigma)$, $Q'_{n.m}(\sigma)$ bezeichnet sind, und die Summation von $n=1$ anfängt, da $P_{0.0}(\sigma)=1$, folglich $P'_{0.0}(\sigma)=0$ ist. Das Moment der entsprechenden Doppelbelegung λ im Punkte (σ_0, μ, φ) bestimmt die Gleichung (7.), und die Vereinfachung durch (17.) führt zu der Gestalt desselben

$$(22.)\quad \lambda = -\frac{i}{2\pi c(1-\sigma_0^2)}\sum_1^\infty (2n+1)\sum_0^n b_{n.m}\frac{Q_{n.m}(\sigma')}{Q'_{n.m}(\sigma_0)} P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi').$$

Es ist endlich die Potentialfunction u_i für den innern Raum des gegebenen Ellipsoids aufzusuchen, deren Differentialquotient nach der Flächennormale genommen gleich demselben Differentialquotienten eines Aggregats ist, das aus der reciproken Entfernung der Punkte $(\sigma_1, \mu_1, \varphi_1)$ und (σ, μ, φ) und der oben characterisirten Function χ besteht. Die Potentialfunction ψ, die in unendlicher Entfernung von dem gegebenen Ellipsoid verschwindet und an der Oberfläche desselben gleich der Einheit wird, ist gleich $\frac{Q_{0.0}(\sigma)}{Q_{0.0}(\sigma_0)}$, indem $P_{0.0}(\mu)$ den Werth Eins hat. Das Flächenelement $\partial\omega$ ist gleich $c^2\sqrt{\mu^2-\sigma_0^2}\sqrt{1-\sigma_0^2}\,\partial\mu\,\partial\varphi$, das Element der Flächennormale — wie schon oben bemerkt — gleich $\frac{c}{i}\frac{\sqrt{\mu^2-\sigma_0^2}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}\partial\sigma_0$, mithin $h = \int\frac{\partial\psi}{\partial p}\partial\omega = \frac{ic}{Q_{0.0}(\sigma_0)}\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{\pi} Q'_{0.0}(\sigma_0)(1-\sigma_0^2)\,\partial\mu\,\partial\varphi$; und weil $Q_{0.0}(\sigma) = -\log\left(\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)$, $Q'_{0.0}(\sigma) = -\frac{2}{\sigma^2-1}$, so kommt

$h = \int \frac{\partial \psi}{\partial p} \partial \omega = \frac{8c\pi}{Q_{0.0}(\sigma_0)} i$, folglich $\chi = \frac{4\pi}{h} \psi = -\frac{i}{2c} Q_{0.0}(\sigma)$. Also wird die Function χ gleich dem ersten Gliede der Reihenentwickelung der in Rede stehenden reciproken Entfernung, negativ genommen, und es entstehen für die Function u_i und die zugehörige Doppelbelegung λ die folgenden Ausdrücke:

$$(23.)\ u_i = \frac{i}{c} \sum_1^{\infty} (2n+1) \sum_0^n b_{n.m}^2 \frac{Q'_{n.m}(\sigma_0)}{P'_{n.m}(\sigma_0)} P_{n.m}(\sigma) P_{n.m}(\sigma_1) P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi_1),$$

$$(24.)\quad \lambda = -\frac{i}{2\pi c(1-\sigma_0^2)} \sum_1^{\infty} (2n+1) \sum_0^n b_{n.m} \frac{P_{n.m}(\sigma_1)}{P'_{n.m}(\sigma_0)} P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu_1) \cos m(\varphi - \varphi_1).$$

§. 4.

Es ist schon oben bemerkt worden, dafs man den Uebergang des abgeplatteten Ellipsoids in eine Kreisebene vom Radius c durch das Abnehmen und Verschwinden der Gröfse σ_0 ausdrückt; die Punkte (σ_0, μ, φ) und $(\sigma_0, -\mu, \varphi)$ nähern sich dann demselben Punkte der Kreisebene, und daher ist es ausreichend, für den Grenzfall der Coordinate μ nur die Ausdehnung von 0 bis $+1$ beizulegen. Der in den Fundamentalaufgaben durch A bezeichnete Punkt kann für $\sigma_0 = 0$ nur ein äufserer sein, und deshalb kommen nur die Potentialfunctionen v_a und u_a in Betracht. Die einfachen Werthe der Ausdrücke $P_{n.m}(\sigma)$ und $Q_{n.m}(\sigma)$ und ihrer Differentialquotienten für $\sigma = 0$ lassen sich der *Neumann*schen Abhandlung gemäfs, — nach Verbesserung einiger dort vorkommenden Druckfehler — wie folgt, zusammenstellen, indem man unterscheidet, ob die ganze Zahl $n - m$ gerade oder ungerade ist

	$(n-m)$ gerade	$(n-m)$ ungerade
$P_{n.m}(0)$	$(-1)^{\frac{n-m}{2}} \frac{1.3\ldots(n+m-1)}{2.4\ldots(n-m)}$	Null
$P'_{n.m}(0)$	Null	$(-1)^{\frac{n-m-1}{2}} \frac{1.3\ldots(n+m)}{2.4\ldots(n-m-1)}$
$Q_{n.m}(0)$	$-\pi\sqrt{-1}\, P_{n.m}(0)$	$-\frac{2}{b_{n.m}} \frac{1}{P'_{n.m}(0)}$
$Q'_{n.m}(0)$	$\frac{2}{b_{n.m}} \frac{1}{P_{n.m}(0)}$	$-\pi\sqrt{-1}\, P'_{n.m}(0)$.

Hieraus ergiebt sich, dafs in dem Ausdruck von v_a durch die Gleichung (16.) diejenigen Glieder, für welche $n - m$ ungerade ist, und in dem Ausdruck von u_a durch die Gleichung (21.) diejenigen Glieder, für welche $n - m$ gerade ist, ausfallen. Um dies anzudeuten, soll die zweite nach m zu nehmende

Summation, respective durch die Zeichen Σ', $'\Sigma$ characterisirt werden. Man sieht ferner, dafs für die nicht verschwindenden Glieder in v_a und u_a respective

$$\frac{P_{n.m}(0)}{Q_{n.m}(0)} = \frac{i}{\pi} \quad \text{und} \quad \frac{P'_{n.m}(0)}{Q'_{n.m}(0)} = \frac{i}{\pi}$$

wird, und so kommen die Gleichungen für v_a und u_a:

$$(25.)\quad \begin{cases} v_a = -\frac{1}{\pi c}\sum_0^\infty(2n+1)\sum_0^n{}' b^2_{n.m} Q_{n.m}(\sigma)Q_{n.m}(\sigma')P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'), \\ u_a = -\frac{1}{\pi c}\sum_0^\infty(2n+1){}'\sum_0^n b^2_{n.m} Q_{n.m}(\sigma)Q_{n.m}(\sigma')P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'). \end{cases}$$

Die Dichtigkeit ϱ der zu v_a gehörenden einfachen electrischen Schicht giebt hier der Unterschied der Werthe des nach der Flächennormale genommenen Differentialquotienten auf beiden Seiten der Fläche an; diese Werthe sind einander numerisch gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen, und führen zu dem Ausdruck

$$(26.)\quad \varrho = \frac{i}{2\pi^2c^2\mu}\sum_0^\infty(2n+1)\sum_0^n{}' b^2_{n.m} Q'_{n.m}(0)Q_{n.m}(\sigma')P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi').$$

In gleicher Weise wird das Moment λ der Doppelschicht, die dem Potential u_a entspricht, aus der Differenz der gleichen und entgegengesetzten Werthe erhalten, die u_a zu beiden Seiten der Kreisebene annimmt, und man findet so

$$(27.)\quad \lambda = \frac{-1}{2\pi^2c}\sum_0^\infty(2n+1){}'\sum_0^n b^2_{n.m} Q_{n.m}(0)Q_{n.m}(\sigma')P_{n.m}(\mu)P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi').$$

Um die Uebereinstimmung der Gleichungen (26.) und (27.) mit den allgemeineren (18.) und (22.) nachzuweisen, mufs man erwägen, dafs für einen sehr kleinen Werth von σ_0 die Werthe von ϱ und λ, welche zwei Punkten (σ_0, μ, φ) und $(\sigma_0, -\mu, \varphi)$ entsprechen, nicht zusammentreffen, und dafs bei dem völligen Verschwinden von σ_0 für den Punkt, in welchen jene beiden Punkte zusammenfallen, nur die Summe der beiden Dichtigkeiten ϱ und nur die Differenz der beiden Momente λ resultirt. Vermöge der Eigenschaft der Gröfsen $P_{n.m}(\mu)$, dafs für ein gerades $(n-m)$ die Gleichung $P_{n.m}(-\mu) = P_{n.m}(\mu)$ und für ein ungerades $(n-m)$ die Gleichung $P_{n.m}(-\mu) = -P_{n.m}(\mu)$ gilt, bleiben demnach für $\sigma_0 = 0$ in der Reihe (18.) nur diejenigen Glieder, für welche $(n-m)$ gerade ist, und in der Reihe (22.) nur diejenigen Glieder, für welche $(n-m)$ ungerade ist; und da nach der gegebenen Tabelle für die erstern $Q'_{n.m}(0) = -\frac{2i}{b_{n.m}}\frac{\pi}{Q_{n.m}(0)}$, für die andern $Q_{n.m}(0) = \frac{2i}{b_{n.m}}\frac{\pi}{Q'_{n.m}(0)}$ wird, so geht die Gleichung (18.) in (26.), und die Gleichung (22.) in (27.) über.

Die Summation der für die Potentialfunctionen v_a und u_a aufgestellten Doppelreihen (25.) wird jetzt das Ziel unserer Untersuchung sein, indem die entsprechenden Werthe für ϱ und λ aus diesen unmittelbar hervorgehen. Vergleicht man die Reihen (25.) mit der Entwickelung (15.) für die reciproke Entfernung der Punkte (σ, μ, φ) und $(\sigma', \mu', \varphi')$, so zeigt sich das allgemeine Glied der ersteren vom allgemeinen Gliede der letzteren nur darin verschieden, dafs, abgesehen von einem für alle Glieder constanten Factor die Function $Q_{n.m}(\sigma)$ an die Stelle der Function $P_{n.m}(\sigma)$ getreten ist. Auch ist es leicht, in der Reihe (15.) diejenigen Glieder, für welche $(n-m)$ gerade ist, von denen, für welche diese Zahl ungerade ist, zu trennen; denn bei der Verwandlung der Gröfse μ in $-\mu$ bleiben durch die schon angeführte Eigenschaft der Gröfsen $P_{n.m}(\mu)$ die erstern ungeändert, während die andern Glieder ihr Vorzeichen umkehren. Benutzt man also das eingeführte Zeichen N als Characteristik und fügt die Werthe der Variabeln σ, μ, φ, σ', μ', φ' in Klammer hinzu, so entstehen aus der Gleichung (15.) diese beiden:

$$(28.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{N(\mu)}}+\dfrac{1}{\sqrt{N(-\mu)}} \\ = 2i\sum\limits_0^\infty(2n+1)\sum\limits_0^n{}' b_{n.m}^2 P_{n.m}(\sigma)\,Q_{n.m}(\sigma')\,P_{n.m}(\mu)\,P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'), \\ \dfrac{1}{\sqrt{N(\mu)}}-\dfrac{1}{\sqrt{N(-\mu)}} \\ = 2i\sum\limits_0^\infty(2n+1)'\sum\limits_0^n b_{n.m}^2 P_{n.m}(\sigma)\,Q_{n.m}(\sigma')\,P_{n.m}(\mu)\,P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi'), \end{cases}$$

welche sich den Reihen (25.) noch näher anschliefsen. Man kann nun eine specielle Voraussetzung machen, durch welche die in Rede stehenden Ausdrücke von dem Winkel φ unabhängig und deshalb einfache Reihen werden, — dafs nämlich die Gröfse $\mu'=1$ sei. Dadurch tritt der Punkt $(\sigma', \mu', \varphi')$ in die gerade Linie, welche im Centrum der Kreisebene senkrecht gegen dieselbe errichtet ist; die Ausdrücke $P_{n.m}(\mu')$, in welchen m einen von Null verschiedenen Werth hat, verschwinden, und $P_{n.0}(1)$ ist bekanntlich gleich der Einheit. Dann gelingt die Summation der specialisirten Reihen (25.) durch ein Verfahren, welches Herr ***Helmholtz*** mir mündlich mittheilte und das auch in der Habilitations-Schrift des Herrn ***C. G. Bauer****) angegeben ist. Ersetzt man nämlich in den zu summirenden Reihen die Gröfse $Q_{n.0}(\sigma)$ durch

*) Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen, welche in der Theorie der Anziehung vorkommen.

den unter (14.) gegebenen Integralausdruck $\int_{-1}^{+1} \frac{P_{n,0}(\alpha)}{\sigma-\alpha}\partial\alpha$, und vertauscht die Ordnung der Summation und der Integration, so befinden sich unter dem Integralzeichen genau diejenigen Reihen, welche aus (28.) durch die Annahme $\mu'=1$, $\sigma=\alpha$ hervorgehn. Wenn nun die Gleichungen (28.) nach der Substitution der reellen Gröfse α für die rein imaginäre σ für das Intervall von $\alpha=-1$ bis $\alpha=+1$ gültig bleiben, so sind für die Ausdrücke v_a und u_a, wenn $\mu'=1$ ist, diese einfachen Integrale gefunden:

$$(29.)\quad \begin{cases} v_a = \dfrac{i}{2\pi c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\sigma',1)}}+\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,-\mu,\sigma',1)}}\right)\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha}, \\ u_a = \dfrac{i}{2\pi c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\sigma',1)}}-\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,-\mu,\sigma',1)}}\right)\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha}, \end{cases}$$

in denen der Charakteristik N die Argumente σ, μ, σ', μ' beigefügt sind und die Argumente φ und φ' nicht vorkommen; denn es ist

$$N(\sigma,\mu,\sigma',1) = 1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu.$$

Diese Anwendung der Gleichung (14.) machte es mir wünschenswerth zu untersuchen, ob nicht für jeden Werth von m ein einfacher Factor $\Omega_m(\alpha)$ existirt, mittelst dessen aus den Gröfsen $P_{n.m}(\alpha)$ die Gröfsen $Q_{n.m}(\sigma)$ durch Integration erhalten werden; denn dies wäre ein Schritt zur Summation der Reihen (25.). Vermöge der aus der Theorie der Kugelfunctionen bekannten Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1} P_{n.m}(\alpha)P_{n'.m}(\alpha)\partial\alpha = 0,\quad \int_{-1}^{+1} P_{n.m}(\alpha)P_{n.m}(\alpha)\partial\alpha = \frac{2}{2n+1}\frac{1}{b_{n.m}},$$

deren erstere n und n' als verschieden voraussetzt, kann man für $\Omega_m(\alpha)$ diese Reihe aufstellen:

$$(30.)\quad \Omega_m(\alpha) = \sum_{n=m}^{n=\infty} \tfrac{1}{2}(2n+1)b_{n.m}P_{n.m}(\alpha)Q_{n.m}(\sigma),$$

aus der die Relation

$$(31.)\quad Q_{n.m}(\sigma) = \int_{-1}^{+1} P_{n.m}(\alpha)\Omega_m(\alpha)\partial\alpha$$

folgt; aber es steht nicht von vorn herein fest, dafs dieses $\Omega_m(\alpha)$ einen geschlossenen Ausdruck zuläfst. Hat man einen solchen gefunden, so sind für den Zweck unserer Summation die Gründe davon nachzuweisen, dafs erstens in den Gleichungen (28.) oder (15.) die reelle Gröfse α für die rein imaginäre Gröfse σ eintreten, und dafs zweitens in diesen Doppelreihen die Summation

nach dem Index n vor der Summation nach dem Index m ausgeführt werden darf. Da nun der Erfolg gelehrt hat, dafs $\Omega_m(\alpha)$ eine algebraische Function der Gröfsen σ und α wird, so scheint es passend, jene beiden Punkte vor der Ausmittelung von $\Omega_m(\alpha)$ zu erledigen, und das soll im nächsten Paragraph geschehen.

§. 5.

In Betreff der ersten Behauptung bemerke ich, dafs dieselbe nur für die Voraussetzung gilt, dafs die Gleichung (15.) sich auf ein abgeplattetes Ellipsoid bezieht, mithin c reell und σ' gleich der positiven Gröfse b' mal i ist. Dagegen ersetze ich die Variable σ durch die allgemeine complexe Gröfse $a+bi$ und werde zeigen, dafs die Gleichung (15.) richtig bleibt, wenn die Gröfsen $\sqrt{1-\sigma^2}$ und $\sqrt{N}$ sich mit $a+bi$ nach der Stetigkeit ändern und für $a=0$ und $b>0$ positive Werthe annehmen, wenn ferner die reellen Werthe a und b die Bedingung

$$(32.)\qquad \frac{a^2}{1+b'^2}+\frac{b^2}{b'^2}<1$$

erfüllen, und die Gröfse b niemals negativ wird. Aus diesem allgemeineren Satze ergiebt sich dann als Folge, dafs der Variable σ stets jeder reelle Werth zwischen den Grenzen -1 und $+1$ beigelegt werden darf — wie verlangt wurde; denn da die Gröfse b' zwar sehr klein aber nicht Null werden kann, so ist die Bedingung $\frac{a^2}{1+b'^2}<1$ immer befriedigt.

Die Entwickelung der Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N}}$ in (15.) ist als eine nach Kugelfunctionen fortschreitende bezeichnet worden; diese Benennung entspricht der geometrischen Auffassung, dafs um den Anfangspunkt der Coordinaten eine Kugel vom Radius gleich der Einheit beschrieben ist, dafs μ den sinus der Breite, φ die Länge auf dieser Kugel bedeutet, und dafs demnach die Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N}}$ eine Function des Orts auf derselben ist. Da nun jede, für die Oberfläche der Kugel eindeutig gegebene, überall endliche Function in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende stets convergente Reihe entwickelt werden kann, und zwar nur auf *eine* Weise, so steht nichts im Wege, nachdem in N für σ der Werth $a+bi$ substituirt ist, den reellen und den imaginären Theil des resultirenden Ausdrucks $\frac{1}{c\sqrt{N}}$, wie derselbe im Vorstehenden definirt ist, durch Kugelfunctionen darzustellen, sobald nur beide Theile überall

eindeutig und endlich bleiben. Durch das Ausschliefsen der negativen Werthe von b ist zunächst die Gröfse $\sqrt{1-\sigma^2}=\sqrt{1-(a+bi)^2}$ zu einer eindeutigen gemacht; der Ausdruck $\frac{1}{c\sqrt{N}}$ wird aber unter den aufgestellten Bedingungen weder mehrdeutig noch unendlich werden, wenn der reelle und der imaginäre Theil der Gröfse N nicht gleichzeitig verschwinden können. Um dies zu beweisen, sei $\sqrt{1-\sigma^2}=k-li$, k der Annahme gemäfs positiv, und $N=T+Ui$. Dann kommt durch Substitution der complexen Werthe

$$U = -2ab+2ab'\mu\mu'+2l\sqrt{1+b'^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi-\varphi'),$$
$$lT+kU = l(2-a^2+b^2+b'^2)-2akb-l(\mu^2+\mu'^2)+2(ak-bl)b'\mu\mu',$$

und nimmt man, um den Beweis apagogisch zu führen, $T=0$ und $U=0$ an, so giebt die Gleichung $lT+kU=0$ einen Ausdruck für $\mu^2+\mu'^2$ durch $\mu\mu'$, der in die Gleichung $U=0$ eingesetzt einen Widerspruch hervorruft. Denn da der cosinus des reellen Winkels $(\varphi-\varphi')$ numerisch die Einheit nicht übertreffen kann, so darf in U der Factor von $\cos(\varphi-\varphi')$ nicht numerisch kleiner sein als der von $\cos(\varphi-\varphi')$ freie Theil des Aggregats, wie es eine nothwendige Folge jener Annahme wäre. Führt man nämlich den erwähnten Ausdruck von $\mu^2+\mu'^2$ in diese Differenz ein:

$$(ab-ab'\mu\mu')^2-l^2(1+b'^2)(1-\mu^2-\mu'^2+\mu^2\mu'^2),$$

so wird dieselbe gleich

$$(33.)\quad (ab-ab'\mu\mu')^2-l^2(1+b'^2)(1+\mu^2\mu'^2) \\ +l(1+b'^2)[l(2-a^2+b^2+b'^2)-2akb+2(ak-bl)b'\mu\mu']$$

und hat die Eigenschaft, unter der vorgeschriebenen Bedingung wesentlich positiv zu sein. Dies wird sogleich klar, wenn man die Gröfsen a, b, k, l durch zwei von einander unabhängige Elemente darstellt. Sei zu diesem Ende $a=\sqrt{1-p^2}\sqrt{1+q^2}$, $b=pq$, — welche Gleichungen stets, und nur auf *eine* Weise, erfüllt werden können, sobald p jeden Werth von 0 bis $+1$, q jeden Werth von 0 bis $+\infty$ annehmen darf und die Gröfse $\sqrt{1-p^2}$ positiv oder negativ, die Gröfse $\sqrt{1+q^2}$ nur positiv ist —, so folgt daraus $k=p\sqrt{1+q^2}$, $l=q\sqrt{1-p^2}$, und die Bedingung $\frac{a^2}{1+b'^2}+\frac{b^2}{b'^2}<1$ nimmt die einfachere Gestalt $q<b'$ an, da $\frac{a^2}{1+q^2}+\frac{b^2}{q^2}=1$ ist, und sowohl q als b' positiv sind. Hierdurch geht der Ausdruck (33.) nach einer leichten Reduction in den folgenden über:

$$(34.)\quad (1-p^2)(b'^2-q^2)[\mu^2\mu'^2+2b'pq\mu\mu'+(b'^2+1-p^2)q^2],$$

welcher in drei Factoren zerfällt. Der erste derselben ist stets positiv, aufser



für $p=1$, und dieser Fall, als der Voraussetzung $a=0$, $\sigma=bi$ entsprechend, kann bei dieser Betrachtung ausgeschlossen werden; der zweite Factor b'^2-q^2 ist positiv wegen der Bedingung (32.), und der dritte Factor, als eine Function zweiten Grades von der reellen Gröfse $\mu\mu'$, ist positiv, weil seine Determinante

$$-q^2(1-p^2)(1+b'^2)$$

stets negativ bleibt. Folglich ist der Ausdruck (34.) durchaus positiv, wie behauptet wurde, und die Voraussetzung, dafs der reelle und der imaginäre Theil von N gleichzeitig Null werden, bei Erfüllung der Ungleichheit (32.) unstatthaft.

Es möge nun die Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N}}=\frac{1}{c\sqrt{T+Ui}}$ nach der für jede Function $f(\mu,\varphi)$ geltenden Formel in eine Kugelfunctionenreihe verwandelt werden. Diese Formel ist die folgende *)

$$f(\mu,\varphi) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\int_{-1}^{+1}\partial\mu_0\int_{-\pi}^{+\pi}Y_n f(\mu_0,\varphi_0)\,\partial\varphi_0,$$

$$\begin{aligned} Y_n &= P_{n.0}[\mu\mu_0+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_0^2}\cos(\varphi-\varphi_0)] \\ &= P_{n.0}(\mu)P_{n.0}(\mu_0)+2b_{n.1}P_{n.1}(\mu)P_{n.1}(\mu_0)\cos(\varphi-\varphi_0) \\ &\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad +2b_{n.n}P_{n.n}(\mu)P_{n.n}(\mu_0)\cos n(\varphi-\varphi_0), \end{aligned}$$

und daher sind für $f(\mu,\varphi)=\frac{1}{c\sqrt{N(a+bi,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}$ diese Integrale auszumitteln

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{P_{n.m}(\mu_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\partial\mu_0\partial\varphi_0}{c\sqrt{N(a+bi,\mu_0,\varphi_0,\sigma',\mu',\varphi')}} = K_{n.m}(a+bi).$$

Kehrt man jetzt für einen Augenblick zur Erwägung der ursprünglichen Voraussetzung zurück, dafs $a=0$, $\sigma=bi$ sei, so erhellt, dafs alsdann der Werth des Integrals $K_{n.m}(\sigma)$ aus der Reihe (15.) eindeutig bestimmt ist, nämlich

$$(35.)\qquad K_{n.m}(\sigma) = i\frac{2\pi}{c}b_{n.m}P_{n.m}(\sigma)Q_{n.m}(\sigma')P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi').$$

Denn für jede Gröfse existirt nur *eine* nach Kugelfunctionen fortschreitende Entwickelung, und überdies läfst sich die vorstehende Gleichung durch den im ersten Paragraph angeführten Satz von *Dirichlet* über Flächenpotentiale leicht verificiren. Da nun aber beide Seiten der Gleichung (35.), wenn $\sigma=a+bi$, $b\geqq 0$ und $\frac{a^2}{1-\sigma'^2}+\frac{b^2}{-\sigma'^2}<1$ genommen wird, endliche und sich nach der Stetigkeit

*) Wegen der Form von Y_n vergl. die Abhandlung von *Jacobi*, Bd. 26, p. 81.

ändernde Functionen von $(a+bi)$ bleiben, so ist sie für dieses Intervall der complexen Gröfse $a+bi$ auch noch gültig. Hierdurch kommt für die Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N(a+bi, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}}$ genau diejenige Entwickelung, welche durch Einsetzung des Werthes $a+bi$ für σ in die rechte Seite der Gleichung (15.) entsteht, und gerade *das* sollte erwiesen werden.

Die zweite zu rechtfertigende Behauptung, dafs in der für $\frac{1}{c\sqrt{N}}$ aufgestellten Reihe die Ordnung der Summationen, welche sich auf die Buchstaben n und m beziehen, vertauscht werden darf, ohne die Convergenz oder den Werth der Reihe zu alteriren, beruht auf einer allgemeinen Eigenschaft der Darstellung einer gegebenen Function durch Kugelfunctionen. Der von *Dirichlet* gegebene Beweis für die allgemeine vorhin benutzte Entwickelungsformel *) setzt voraus, dafs bei der Summation zuerst das Glied mit $n=0$, dann die Glieder mit $n=1$, etc. genommen werden, wobei die Gliederzahl allerdings mit n wächst, aber für jedes bestimmte n gleich $2n+1$, also endlich bleibt. Fafst man dagegen zuerst alle Glieder mit $m=0$, dann alle Glieder mit $m=1$ zusammen etc., so enthält schon jede dieser einzelnen Summen unendlich viele Glieder, und es bedarf eines Beweises, sowohl dafs diese convergiren, als auch dafs die Summe von allen die gegebene Function richtig darstellt. Um denselben zu führen, denke man sich die gegebene Function $f(\mu, \varphi)$ zunächst durch eine nach den cosinus und sinus der Vielfachen des Winkels φ geordnete Reihe entwickelt, die für jeden Werth von μ und φ convergirt, und bekanntlich diese Form hat:

$$f(\mu, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\mu, \varphi_0)\,\partial\varphi_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\mu, \varphi_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\,\partial\varphi_0.$$

Man betrachte dann das allgemeine Glied dieser Reihe,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\mu, \varphi_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\,\partial\varphi_0,$$

als Function von μ und φ und stelle dasselbe durch Kugelfunctionen dar. Dadurch entsteht eine stets convergente Reihe, bei der alle Glieder der *allgemeinen* Reihe mit einem von dem bestimmten m *verschiedenen* zweiten Index herausfallen. Die Substitution derselben für das Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\mu, \varphi_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)\,\partial\varphi_0$$

*) Bd. 17, pg. 35 dieses Journals.

in die vorstehende trigonometrische Reihe giebt dann genau dasselbe Resultat, wie die Vertauschung der Summationsordnung in der allgemeinen Entwickelungsformel für die Kugelfunctionen, und dasselbe ist vollständig verificirt.

§. 6.

Die Voruntersuchung, welche für die Anwendung des Ausdrucks $\Omega_m(\alpha)$ zur Summation der Reihen (25.) nothwendig war, ist auch bei der directen Herleitung des Werthes $\Omega_m(\alpha)$ aus der Gleichung (15.), welche die nächste Aufgabe bildet, wesentlich. $\Omega_m(\alpha)$ war durch diese Reihe dargestellt:

$$(30.)\qquad \Omega_m(\alpha) = \sum_{n=m}^{n=\infty} \tfrac{1}{2}(2n+1) b_{n.m} P_{n.m}(\alpha) Q_{n.m}(\sigma),$$

und derjenige Theil der Entwickelung von $\frac{1}{c\sqrt{N}}$, der in den Ausdruck $\cos m(\varphi-\varphi')$ multiplicirt ist und nach dem vorigen Paragraph eine convergente Reihe bildet, kann als bestimmtes Integral, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$(36.)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos m(\varphi-\varphi')\partial\varphi}{\sqrt{N}} = i\sum_{n=m}^{n=\infty}(2n+1)b_{n.m}^2 P_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma') P_{n.m}(\mu) P_{n.m}(\mu').$$

Da die Gröfsen

$$P_{n.m}(\mu') = (1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m P_{n.0}(\mu')}{d\mu'^m}$$

nach Entfernung des Factors $(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}m}$ ganze rationale Functionen von μ' bleiben, so ist es gestattet, beide Seiten der Gleichung (36.) durch den Term $(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}m}$ zu dividiren, und dann μ' in die Einheit übergehn zu lassen. Indem nun $\frac{d^m P_{n.0}(\mu')}{d\mu'^m}$ für $\mu'=1$ den Werth

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+m)}{1.2.3\dots m.2^m} = \frac{1}{1.2.3\dots m.b_{n.m}.2^m}$$

annimmt, so verwandelt sich die rechte Seite der Gleichung (36.) in die Form

$$\frac{i}{1.2.3\dots m.2^m}\sum_{n=m}^{n=\infty}(2n+1) b_{n.m} P_{n.m}(\sigma) Q_{n.m}(\sigma') P_{n.m}(\mu),$$

welche der Reihe (30.) viel näher steht, und die linke Seite der Gleichung (36.) wird ohne Integralzeichen darstellbar. Um dies zu erkennen, darf man nur das Integral in eine bekannte Potenzreihe entwickeln. Sei

$$N = \gamma^2 - 2\gamma\delta\cos(\varphi-\varphi') + \delta^2,$$

so kommt unter der Voraussetzung, dafs der analytische Modul von $\frac{\gamma}{\delta}$ unter der Einheit liegt, die Gleichung



$$(37.)\quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos m(\varphi-\varphi')\partial\varphi}{\sqrt{(\gamma^2-2\gamma\delta\cos(\varphi-\varphi')+\delta^2)}}$$

$$= 2\,\frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2m}\,\frac{\gamma^m}{\delta^{m+1}}\left\{1+\frac{1.2m+1}{2.2m+2}\,\frac{\gamma^2}{\delta^2}+\cdots\right\},$$

in welche für unsern Fall die Werthe

$$\delta=\frac{\sqrt{N_2}+\sqrt{N_1}}{2},\quad \gamma=\frac{\sqrt{N_2}-\sqrt{N_1}}{2},\quad \frac{\gamma}{\delta}=\frac{4\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}}{(\sqrt{N_2}+\sqrt{N_1})^2}$$

einzusetzen sind; der Kürze wegen ist

$$N_1 = -(\sigma\mu-\sigma'\mu')^2+(\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}-\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu'^2})^2,$$

$$N_2 = -(\sigma\mu-\sigma'\mu')^2+(\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}+\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu'^2})^2$$

geschrieben. Dividirt man jetzt die Gleichung (37.) durch $(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}m}$, so entsteht die folgende Gleichung:

$$(38.)\quad \frac{1}{(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}m}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos m(\varphi-\varphi')\partial\varphi}{\sqrt{N}}$$

$$= 4\,\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots\ldots 2m}\,\frac{(4\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2})^m}{(\sqrt{N_2}+\sqrt{N_1})^{2m+1}}\left\{1+\frac{1.2m+1}{2.2m+2}\,\frac{\gamma^2}{\delta^2}+\cdots\right\};$$

und nähert sich μ' der Einheit, so verschwindet γ, es wird

$$N_1 = N_2 = 1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu,$$

und die rechte Seite von (38.) reducirt sich auf das *eine* Glied

$$4\,\frac{1.3\ldots(2m-1)}{2.4\ldots\ldots 2m}\,\frac{(4\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2})^m}{(2\sqrt{1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu})^{2m+1}}.$$

Dieser Grenzwerth des Integrals hat mit dem Grenzwerth der rechten Seite von (36.) den Factor $\frac{1}{2.4\ldots 2m}$ gemeinschaftlich, so dafs nach Abwerfung desselben diese Relation erscheint:

$$(39.)\quad 1.3\ldots(2m-1)\,\frac{(\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2})^m}{(1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu)^{\frac{1}{2}(2m+1)}}$$

$$= i\sum_{n=m}^{n=\infty}\tfrac{1}{2}(2n+1)\,b_{n.m}\,P_{n.m}(\sigma)\,Q_{n.m}(\sigma')\,P_{n.m}(\mu).$$

Aus der vorliegenden Reihe kann die Form der Reihe (30.) hervorgebracht werden, indem man dieselbe mit einem geeigneten Factor multiplicirt und nach der Gröfse μ zwischen den Grenzen -1 und $+1$ die Integration ausführt. Nimmt man nämlich den Factor $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m-1}(1+\mu)\,\partial\mu$, so verschwindet im allgemeinen Gliede der Reihe der Ausdruck $P_{n.m}(\mu)$ un[illegible]nen allen Gliedern

gemeinsamen Factor ersetzt; denn es ist

$$(40.)\ \int_{-1}^{+1} P_{n.m}(\mu)(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m-1}(1+\mu)\,\partial\mu = \int_{-1}^{+1}\frac{d^m P_{n.0}(\mu)}{d\mu^m}(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu$$
$$= 1.2.3\ldots(m-1).2^m.$$

Der Beweis dieser Relation ergiebt sich leicht aus der Betrachtung der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2\mu z+z^2)}} = 1+P_{1.0}(\mu)z+P_{2.0}(\mu)z^2+\cdots+P_{n.0}(\mu)z^n+\cdots,$$

durch welche *Legendre* die Gröfsen $P_{n.0}(\mu)$ definirt hat, und die für jedes unter der Einheit liegende z gilt. Differentiirt man dieselbe $m$mal successive nach der Variable μ, so kommt die Gleichung

$$\frac{1.3\ldots(2m-1)z^m}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{1}{2}(2m+1)}} = \sum_{n=m}^{n=\infty}\frac{d^m P_{n.0}(\mu)}{d\mu^m}z^n,$$

in der die Functionen $P_{n.0}(\mu)$, für welche $n<m$ ist, als ganze rationale Functionen n^{ten} Grades, durch die Derivation verschwunden sind. Um die Form des Integrals in (40.) zu erhalten, ist dann der Factor $(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\partial\mu$ hinzuzufügen und zwischen den Grenzen $\mu=-1$ und $\mu=+1$ zu integriren, und man hat

$$(41.)\quad 1.3\ldots(2m-1)z^m\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{1}{2}(2m+1)}}$$
$$=\sum_{n=m}^{n=\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{d^m P_{n.0}(\mu)}{d\mu^m}(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu.z^n.$$

Das Integral der linken Seite geht durch Einführung der Integrationsvariable γ mittelst der Gleichung $\mu=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ in die folgende einfachere Form über:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{1}{2}(2m+1)}} = \int_0^\infty\frac{4^m\gamma^m\,\partial\gamma}{[(1-z)^2\gamma^2+2(1+z^2)\gamma+(1+z)^2]^{\frac{1}{2}(2m+1)}}.$$

Betrachtet man die etwas allgemeinere Gestalt

$$(42.)\quad J=\int_0^\infty\frac{\gamma^m\,\partial\gamma}{(\gamma^2+2e\gamma+f)^{\frac{1}{2}(2m+1)}},$$

so ergiebt sich leicht, dafs

$$J=\frac{(-1)^{m-1}}{1.3.5\ldots(2m-1)}\frac{\partial^{m-1}}{\partial e^{m-1}}\int_0^\infty\frac{\gamma\,\partial\gamma}{(\gamma^2+2e\gamma+f)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, oder, weil das differentiirte Integral den Werth $\frac{1}{e+\sqrt{f}}$ hat, dafs die Gleichung

$$(43.)\quad J=\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{1.3.5\ldots(2m-1)}\frac{1}{(e+\sqrt{f})^m}$$



stattfindet. Setzt man nun wieder

$$e = \frac{1+z^2}{(1-z)^2}, \qquad f = \frac{(1+z)^2}{(1-z)^2},$$

so kommt nach einer kleinen Reduction

$$\int_{-1}^{+1} \frac{(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu}{(1-2\mu z+z^2)^{\frac{1}{2}(2m+1)}} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{1.3.5\ldots(2m-1)}\,2^m\,\frac{1}{1-z},$$

und aus der Gleichung (41.) wird die folgende:

$$(44.)\quad 1.2.3\ldots(m-1)\,\frac{2^m z^m}{1-z} = \sum_{n=m}^{n=\infty}\int_{-1}^{+1}\frac{d^m P_{n.0}(\mu)}{d\mu^m}(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu . z^n,$$

welche durch Entwickelung der Gröfse $\frac{z^m}{1-z}$ in die Potenzreihe $z^m+z^{m+1}+\cdots$ und durch Gleichsetzung der Coefficienten gleichhoher Potenzen die zu beweisende Gleichung (40.) hervorbringt. Dem zufolge entsteht aus (39.) die Gleichung

$$(45.)\quad \frac{1.3\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)}\,\frac{(\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2})^m}{2^m}\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu}{(1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu)^{\frac{1}{2}(2m+1)}}$$
$$= i\sum_{n=m}^{n=\infty}\tfrac{1}{2}(2n+1)\,b_{n.m}\,P_{n.m}(\sigma)\,Q_{n.m}(\sigma'),$$

wo nur das Integral der linken Seite auszumitteln bleibt. Durch die oben benutzte Substitution $\mu = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ kommt

$$\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu}{(1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu)^{\frac{1}{2}(2m+1)}} = \int_0^\infty \frac{4^m\gamma^m\,\partial\gamma}{\left\{\left(\frac{\sigma'-\sigma}{i}\right)^2\gamma^2+2\gamma(2-\sigma^2-\sigma'^2)+\left(\frac{\sigma'+\sigma}{i}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}(2m+1)}}$$

und zieht man aus dem Nenner des Integrals rechter Hand den Factor $\left(\frac{\sigma'-\sigma}{i}\right)^{2m+1}$ heraus und setzt

$$\frac{2-\sigma^2-\sigma'^2}{\left(\frac{\sigma'-\sigma}{i}\right)^2} = e, \qquad \left(\frac{\sigma'+\sigma}{\sigma'-\sigma}\right)^2 = f,$$

so stimmt dasselbe mit dem Integral J in (42.) überein, dessen Werth in (43.) angegeben ist. Hieraus folgt die Bestimmung

$$(46.)\quad \int_{-1}^{+1}\frac{(1-\mu^2)^{m-1}(1+\mu)\,\partial\mu}{(1-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2+2\sigma\sigma'\mu)^{\frac{1}{2}(2m+1)}} = \frac{1.2.\ldots.(m-1)}{1.3\ldots(2m-1)}\,\frac{2^m}{\left(\frac{\sigma'-\sigma}{i}\right)(1-\sigma'^2)^m}$$

und die Gleichung (45.) geht in die folgende über:

$$(47.)\quad \left(\frac{1-\sigma^2}{1-\sigma'^2}\right)^{\frac{1}{2}m}\frac{1}{\sigma'-\sigma} = \sum_{n=m}^{n=\infty}\tfrac{1}{2}(2n+1)\,b_{n.m}\,P_{n.m}(\sigma)\,Q_{n.m}(\sigma').$$

Nun gelten nach dem vorigen Paragraphen die angestellten Betrachtungen nicht nur wenn σ eine rein imaginäre, sondern auch wenn σ eine zwischen den Grenzen -1 und $+1$ eingeschlossene reelle Gröfse bedeutet; deshalb ist es gestattet, der Uebereinstimmung mit der früheren Bezeichnung wegen, in (47.) für σ den Buchstaben α, für σ' den Buchstaben σ zu schreiben, und man bekommt für das gesuchte $\Omega_m(\alpha)$ diesen Ausdruck:

$$(48.)\qquad \Omega_m(\alpha) = \sum_{n=m}^{n=\infty} \tfrac{1}{2}(2n+1) b_{n.m} P_{n.m}(\alpha) Q_{n.m}(\sigma) = \left(\frac{1-\alpha^2}{1-\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}m} \frac{1}{\sigma-\alpha}.$$

Derselbe erfüllt den Zweck, durch eine Integration von den Gröfsen $P_{n.m}(\alpha)$ *zu den Gröfsen* $Q_{n.m}(\sigma)$ *zu führen; indem man ihn in die Gleichung* (31.) *substituirt, entsteht die Relation*

$$(31^*.)\qquad Q_{n.m}(\sigma) = \frac{1}{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}} \int_{-1}^{+1} P_{n.m}(\alpha)(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha},$$

von der die Neumannsche Gleichung für $Q_{n.0}(\sigma)$ (14.) *ein besonderer Fall ist.* Wenn man übrigens beachtet, dafs die Ausdrücke $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} P_{n.m}(\mu)$ und $(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}m} Q_{n.m}(\mu)$ derselben gewöhnlichen Differentialgleichung genügen, und diese aus der Differentialgleichung (12.) wirklich herleitet, so macht sich die Verification von (31 *.) sehr leicht.

Jetzt sind wir in den Stand gesetzt, geschlossene Ausdrücke für die Gröfsen v_α und u_α in (25.) aus den Gleichungen (28.) zu entwickeln. In denselben werde für σ die reelle Gröfse α, und statt φ der Buchstabe β geschrieben, ferner seien die Reihen nach den Cosinus der Vielfachen von $(\beta-\varphi')$ geordnet. Dann bilde man die Reihe

$$(49.)\qquad \left[\tfrac{1}{2} + \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}}{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}} \cos m(\varphi-\beta)\right] \frac{1}{\sigma-\alpha}$$
$$= \tfrac{1}{2} \frac{-\sigma^2+\alpha^2}{2-\alpha^2-\sigma^2-2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\sigma^2}\cos(\varphi-\beta)} \cdot \frac{1}{\sigma-\alpha},$$

welche immer convergirt, da α die Einheit nicht übertrifft und $\sqrt{1-\sigma^2}$ stets gröfser als dieselbe ist, und multiplicire die Reihen in (28.) mit der Reihe (49.), und die linke Seite jener Gleichungen mit dem Werthe dieser Reihe. Wird jetzt das Element $\partial\beta$ hinzugefügt und nach demselben von $\beta = -\pi$ bis $\beta = \pi$ integrirt, so tritt in den Reihen der Ausdruck $\cos m(\varphi-\varphi')$ an die Stelle von $\cos m(\beta-\varphi')$, und zu dem Aggregat, das in $\cos m(\varphi-\varphi')$ multiplicirt ist, kommt der Factor $\pi \frac{(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}}{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}} \cdot \frac{1}{\sigma-\alpha}$ hinzu. Die Integration nach $\partial\alpha$ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ verwandelt nun vermöge der Relation (31 *.) jedes $P_{n.m}(\alpha)$ in $Q_{n.m}(\sigma)$ und somit die in Rede stehenden Reihen in die Gestalt

der Reihen (25.). Dadurch aber entsteht das gesuchte Resultat

$$(50.)\begin{cases} v_a = \frac{-i}{4\pi^2 c}\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}} \\ \qquad\qquad + \frac{1}{\sqrt{N(\alpha,-\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}}\Big)\frac{(\sigma+\alpha)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\alpha^2-\sigma^2-2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\sigma^2}\cos(\varphi-\beta)}, \\ u_a = \frac{-i}{4\pi^2 c}\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\Big(\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}} \\ \qquad\qquad - \frac{1}{\sqrt{N(\alpha,-\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}}\Big)\frac{(\sigma+\alpha)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\alpha^2-\sigma^2-2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\sigma^2}\cos(\varphi-\beta)}; \end{cases}$$

der Factor des Zählers $(\sigma+\alpha)$ ist durch Division von $(\sigma-\alpha)$ in $(\sigma^2-\alpha^2)$ in der Gleichung (49.) hervorgebracht.

§. 7.

Man kann die Form der Doppelintegrale in (50.) ein wenig vereinfachen, indem man bemerkt, dafs die Gröfsen

$$N(\alpha,-\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi') \quad \text{und} \quad N(-\alpha,\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')$$

identisch sind, und statt der Integrationsvariable α eine nur durch das Vorzeichen verschiedene Variable einführt; dann kommt durch Addition der zusammengehörenden ursprünglichen und neuen Gleichungen

$$(50^*.)\begin{cases} v_a = \frac{-i}{2\pi^2 c}\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}}\,\frac{\sigma\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\alpha^2-\sigma^2-2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\sigma^2}\cos(\varphi-\beta)}, \\ u_a = \frac{-i}{2\pi^2 c}\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}}\,\frac{\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\alpha^2-\sigma^2-2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\sigma^2}\cos(\varphi-\beta)}. \end{cases}$$

Die directe Werthbestimmung dieser Integrale ist in dem speciellen zuerst behandelten Falle, dafs $\mu'=1$ ist, ohne Schwierigkeit; die einfachen Integrale der Gleichung (29.), in welche die vorliegenden sich alsdann verwandeln, geben nach der gewöhnlichen Methode die folgenden Ausdrücke, sobald man nur darauf achtet, die Quadratwurzelgröfse sich stetig ändern und für $\alpha=0$ einen positiven Werth annehmen zu lassen:

$$(51.)\begin{cases} [v_a] = \\ \frac{1}{\pi c}\Big(\frac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\sigma',1)}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\sigma',1)}}{-\sigma\sigma'+\mu} + \frac{1}{\sqrt{N(\sigma,-\mu,\sigma',1)}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,-\mu,\sigma',1)}}{-\sigma\sigma'-\mu}\Big), \\ [u_a] = \\ \frac{1}{\pi c}\Big(\frac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\sigma',1)}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\sigma',1)}}{-\sigma\sigma'+\mu} - \frac{1}{\sqrt{N(\sigma,-\mu,\sigma',1)}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,-\mu,\sigma',1)}}{-\sigma\sigma'-\mu}\Big), \end{cases}$$

wo die Bogen zwischen den Grenzen 0 und π zu nehmen sind. Dagegen

scheiterten die mir bekannten Hülfsmittel an der Aufgabe, die Natur der Integrale (50*.) zu erforschen, sobald den darin vorkommenden Gröfsen keine Beschränkung auferlegt wird*), und ich sah mich genöthigt, bei der weiteren Untersuchung auf den Umstand zu fufsen, dafs v_a und u_a für den ganzen unendlichen Raum mit Ausschlufs der Kreisscheibe Potentialfunctionen sind, die in unendlicher Entfernung von derselben verschwinden und durch die an der Scheibe selbst zu erfüllenden Bedingungen eindeutig bestimmt sind. Ferner konnte als Fingerzeig dienen, dafs diese Potentialfunctionen für $\mu'=1$ in die Formen $[v_a]$ und $[u_a]$ der Gleichung (51.) übergehen müssen. Hierbei schien es wichtig, der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

eine Gestalt zu geben, bei welcher leicht zu erkennen ist, ob Functionen, die den Gröfsen $[v_a]$ und $[u_a]$ ähnlich gebildet sind, derselben genügen oder nicht. Da nun die Form der *Laplace*schen Differentialgleichung, in welche sie durch die Coordinaten σ, μ, φ übergeht,

$$(52.)\quad \frac{\partial(1-\sigma^2)\frac{\partial V}{\partial\sigma}}{\partial\sigma}-\frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}}{\partial\mu}+\frac{\sigma^2-\mu^2}{(1-\sigma^2)(1-\mu^2)}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0,$$

sogar für die Verification der Ausdrücke $[v_a]$ und $[u_a]$ sich sehr unbequem zeigte, so entschied ich mich dafür das Quadrat der Entfernung der Punkte (σ,μ,φ) und (σ',μ',φ') dividirt durch das Quadrat des Radius c, oder N statt der Variable φ als Coordinate einzuführen, und die andern beiden Coordinaten σ und μ beizubehalten. Um dann jeden Punkt des Raumes durch σ, μ, N auf *eine* Weise ausdrücken zu können, hat man der Gröfse $\sqrt{1-\mu^2}$ auch das negative Zeichen zu gestatten; doch wird dies in unserer Aufgabe keine Anwendung finden. Die partielle Differentialgleichung (52.) für eine Function V im Punkte (σ,μ,N) erscheint demnach, wie folgt:

$$(53.)\quad \frac{\partial(1-\sigma^2)\frac{\partial V}{\partial\sigma}}{\partial\sigma}+2(2\sigma'\mu'\mu+(-\sigma'^2-\mu'^2+\sigma^2-\mu^2-N)\sigma)\frac{\partial^2 V}{\partial N\partial\sigma}$$
$$-\frac{\partial(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}}{\partial\mu}-2(2\sigma'\mu'\sigma+(-\sigma'^2-\mu'^2-\sigma^2+\mu^2-N)\mu)\frac{\partial^2 V}{\partial N\partial\mu}$$
$$+(\sigma^2-\mu^2)\Big(4N\frac{\partial^2 V}{\partial N^2}+6\frac{\partial V}{\partial N}\Big)=0.$$

*) Durch die Vertauschung von μ und μ' erhält man offenbar für v_a und u_a Ausdrücke von derselben Form wie in (51.), wenn $\mu=1$ ist; aufserdem liefs sich nur der Grenzwerth des Products $\varrho\mu$ für $\mu=0$ direct ableiten.

Bildet man nun den Ausdruck

$$(54.)\qquad V = \frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'}\right)$$

und substituirt denselben in (53.), so zeigt die Rechnung, welche ich der Kürze halber nicht hersetze, dafs die partielle Differentialgleichung (53.) befriedigt wird und folglich auch die Gleichung (52.). Ein zweites particulares Integral der letztern erhält man aus dem vorstehenden, indem man statt der von σ, μ, φ unabhängigen Gröfse μ' den entgegengesetzten Werth $-\mu'$ einführt, nämlich $\frac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'-\mu\mu'}$; und es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dafs

$$N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi') = N(\sigma,-\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')$$

ist. Durch diese beiden Particularlösungen werden die allgemeinen Ausdrücke v_a und u_a der Gleichung (50.) in folgender Weise dargestellt:

$$(55.)\quad\begin{cases} v_a = \dfrac{1}{\pi c}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'-\mu\mu'}\Big), \\ u_a = \dfrac{1}{\pi c}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'} \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',-\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'-\mu\mu'}\Big), \end{cases}$$

wo die zu den Tangenten gehörenden Bogen zwischen den Grenzen 0 und π zu wählen sind; doch mufs eine strenge Verification dieser Gleichungen erfolgen. Zu diesem Ende ist es nöthig sich zu überzeugen, dafs die Functionen, welche v_a und u_a darstellen sollen, und die als Lösungen der *Laplace*schen Differentialgleichung schon erwiesen sind, in unendlicher Entfernung von der Kreisscheibe verschwinden, und im ganzen Raume, diese Fläche ausgenommen, endlich und stetig sind, und endliche und stetige Differentialquotienten in jeder Richtung haben. Diese Eigenschaften besitzt der Ausdruck

$$\frac{1}{c\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'};$$

denn sobald der Punkt (σ,μ,φ) sich weiter von der Kreisscheibe entfernt als um eine gewisse leicht anzugebende Gröfse, so nimmt der erste Factor desselben mehr und mehr ab, während der zweite Factor die Grenze π nicht

überschreitet, und eine Unterbrechung der Stetigkeit findet auch nicht an *der* Stelle statt, wo der erste Factor unendlich grofs wird. Nähert sich nämlich der Punkt (σ, μ, φ) dem festen Punkte $(\sigma', \mu', \varphi')$, so ist der Ausdruck $-\sigma\sigma' + \mu\mu'$ wesentlich positiv, und die Gröfse unter dem Zeichen arctg. ein ächter Bruch; entwickelt man also den Bogen nach Potenzen der Tangente und dividirt den Term $\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}$ in die einzelnen Glieder der Reihe, dann kommt ein Resultat, das offenbar mit Einschlufs seiner Differentialquotienten endlich und stetig ist. Da nun der Ausdruck

$$\frac{1}{c\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}}{-\sigma\sigma' - \mu\mu'}$$

dieselbe Betrachtung erlaubt, so sind die Ausdrücke für v_a und u_a in (55.) Potentialfunctionen des bezeichneten Characters. Es bleibt aber noch zu zeigen, dafs der Werth für v_a für jeden Punkt der Kreisfläche $(0, \mu, \varphi)$ in die Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N(0, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}}$ übergeht, und der Differentialquotient des Werthes für u_a nach der Flächennormale genommen in den gleichen Differentialquotienten der Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}}$ für $\sigma = 0$. Der erste Umstand wird dadurch absolvirt, dafs die Gröfsen

$$\frac{1}{c\sqrt{N(0, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c\sqrt{N(0, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}}$$

zusammenfallen, und dafs die Summe

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{N(0, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}}{\mu\mu'}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{N(0, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}}{-\mu\mu'}\right)$$

den Werth π hat, indem die Tangenten gleich und entgegengesetzt, und die zugehörigen Bogen zwischen den Grenzen 0 und π zu nehmen sind. Wegen des zweiten Umstandes hat man den Differentialquotienten des für u_a angegebenen Ausdrucks nach σ zu bilden, und dann $\sigma = 0$ zu setzen; da nun

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}}\right) = -\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}}{-\sigma\sigma' + \mu\mu'}\right) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', -\mu', \varphi')}}{-\sigma\sigma' - \mu\mu'}\right)$$

wird, wenn man nach vollzogener Differentiation $\sigma = 0$ setzt, so verwandelt sich der in Rede stehende Differentialquotient des ganzen Aggregats in den *einen* Term $\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{c\sqrt{N(\sigma, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')}}\right)$ für $\sigma = 0$, wie behauptet wurde. Hiermit sind die Gleichungen (55.) zufolge der Untersuchungen des ersten Para-

graphen streng bewiesen, und dienen jetzt ihrerseits zur Ausmittelung der Doppelintegrale, durch welche in (50*.) die Functionen v_a und u_a dargestellt sind, und bei denen keine von beiden Integrationen für sich durch algebraische und logarithmische Gröfsen absolvirt werden kann. Indem man beide Gleichungen durch Addition vereinigt, kommt das Resultat

$$-\frac{i}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\sqrt{N(\alpha,\mu,\beta,\sigma',\mu',\varphi')}}\,\frac{(\sigma+\alpha)\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\alpha^2-\sigma^2-2\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\sigma^2}\cos(\varphi-\beta)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'}.$$

Es sei gestattet, mit wenigen Worten auf die geometrische Deutung der Functionen v_a und u_a einzugehn. Nach (55.) ist v_a die Summe und u_a die Differenz von zwei Ausdrücken, deren zweiter aus dem ersten durch Verwandlung der Gröfse μ' in $-\mu'$ hergeleitet ist: sobald also die Elemente des ersten durch die Lage des festen Punktes (σ',μ',φ') und des beweglichen Punktes (σ,μ,φ) bestimmt sind, hat man nur statt des Punktes (σ',μ',φ') den Punkt $(\sigma',-\mu',\varphi')$ zu setzen, und dieselbe Construction zu machen, um den zweiten Ausdruck zu erhalten. Der Punkt $(\sigma',-\mu',\varphi')$ wird aber gefunden, indem man von dem Punkte (σ',μ',φ') auf die Ebene des gegebenen Kreises ein Perpendikel herabläfst, dasselbe um sich selbst verlängert und den Endpunkt desselben nimmt. Mithin genügt es den ersteren Ausdruck ins Auge zu fassen. Es werde der Punkt (σ,μ,φ) durch B bezeichnet, und von demselben auf die Ebene des Kreises das Perpendikel BC gefällt; sei ferner O der Mittelpunkt des Kreises, so werde der Durchmesser $DOCE$ gezogen, und der Punkt B mit den Endpunkten desselben, D und E, verbunden. Um die Bestandtheile dieser Figur durch die Coordinaten σ, μ, φ auszudrücken, möge σ gleich der positiven Gröfse s mal der imaginären Einheit gesetzt, und μ zunächst positiv angenommen werden; dann ist nach den Gleichungen (10.)

$$BC=cs\mu,\qquad OC=c\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-\mu^2},\qquad DE=2c,$$

und man findet leicht

$$DB^2=c^2(s^2\mu^2+(1+\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-\mu^2})^2),$$
$$EB^2=c^2(s^2\mu^2+(1-\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-\mu^2})^2),$$

folglich

$$DB=c(\sqrt{1+s^2}+\sqrt{1-\mu^2}),\qquad EB=c(\sqrt{1+s^2}-\sqrt{1-\mu^2}).$$

Der Winkel DBE werde ω genannt, so giebt eine Grundformel der Trigo-

nometrie die Bestimmungen

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \frac{s}{\sqrt{s^2+\mu^2}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\mu}{\sqrt{s^2+\mu^2}};$$

wird dagegen μ negativ gedacht, so hat man bei derselben Construction die Gleichungen

$$\cos\left(\frac{-\omega}{2}\right) = \frac{s}{\sqrt{s^2+\mu^2}}, \qquad \sin\left(\frac{-\omega}{2}\right) = \frac{\mu}{\sqrt{s^2+\mu^2}}.$$

Ferner ist die Gröfse $c\sqrt{s^2+\mu^2}$ die mittlere Proportionale zu den beiden Linien DB und EB. Wird nun der Punkt $(\sigma', \mu', \varphi')$ A genannt und in gleicher Weise das Perpendikel AC' auf die Kreisebene herabgelassen, der Durchmesser $D'OC'E'$ gezogen, und der Winkel $D'AE'$ mit ω' bezeichnet, so ist wieder

$$\cos\left(\frac{\pm\omega'}{2}\right) = \frac{s'}{\sqrt{s'^2+\mu'^2}}, \qquad \sin\left(\frac{\pm\omega'}{2}\right) = \frac{\mu'}{\sqrt{s'^2+\mu'^2}},$$

wo das obere Zeichen für ein positives, das untere für ein negatives μ' gilt, und $c\sqrt{s'^2+\mu'^2}$ gleich der mittleren Proportionale zu den Linien $D'A$ und $E'A$. Hierdurch ergiebt sich für den Ausdruck

$$\frac{1}{c\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'},$$

dafs

$$-\sigma\sigma'+\mu\mu' = ss'+\mu\mu' = \sqrt{s^2+\mu^2}\sqrt{s'^2+\mu'^2}\cos\left(\frac{\pm\omega\mp\omega'}{2}\right)$$

wird; schreibt man daher die Tangente, deren Bogen genommen werden soll, in der Form

$$\frac{cc\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{c\sqrt{s^2+\mu^2}.c\sqrt{s'^2+\mu'^2}.\cos\left(\frac{\pm\omega\mp\omega'}{2}\right)},$$

so ist c der gegebene Kreishalbmesser, $c\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}$ die Verbindungslinie der Punkte A und B, $c\sqrt{s^2+\mu^2}$ die mittlere Proportionale der Linien DB und EB, $c\sqrt{s'^2+\mu'^2}$ die mittlere Proportionale der Linien $D'A$ und $E'A$, und $\cos\left(\frac{\pm\omega\mp\omega'}{2}\right)$ der cosinus der halben Differenz der Winkel DBE und $D'AE'$, sobald die Punkte B und A auf derselben Seite der Ebene des Kreises liegen, und der cosinus der halben Summe der Winkel DBE und $D'AE'$, sobald B und A auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen. Alle Elemente des in Rede stehenden Ausdrucks ändern sich nach der Stetigkeit, wenn der Punkt A festgehalten wird, und der Punkt B den ganzen un-

endlichen Raum durchläuft, mit Ausnahme der Gröfse $\cos\left(\frac{\pm\omega\mp\omega'}{2}\right)$, und diese macht nur dann einen Sprung, wenn der Weg des Punktes B die Ebene ***innerhalb*** des Kreises durchkreuzt; darin besteht aber der eigenthümliche Character dieser Function.

Nachdem die wahre Form der Potentialfunctionen v_a und u_a in den Gleichungen (55.) aufgestellt ist, bleibt die Dichtigkeit ϱ der einfachen Belegung und das Moment λ der Doppelbelegung aus dieser zu entwickeln. Der Differentialquotient von v_a nach der Normale der Kreisfläche, an der Seite der positiven μ genommen, ist gleich $\frac{i}{c\mu}\frac{\partial v_a}{\partial \sigma}$, für $\sigma = 0$ und $\mu > 0$, an der anderen Seite gilt der gleiche und entgegengesetzte Werth; schreibt man hier der Kürze halber N für $N(0, \mu, \varphi, \sigma', \mu', \varphi')$, so kommt

$$(56.)\qquad \left(\frac{\partial v_a}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{1}{\pi c}\left(\frac{2\sigma'}{N} + \frac{\sigma'\mu\mu'}{\sqrt{N^3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\mu\mu'} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\mu\mu'}\right)\right).$$

Die Bogen der Tangenten sind zwischen 0 und π zu nehmen; wird aber für einen Augenblick $\frac{\sqrt{N}}{\mu\mu'} = \eta$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\operatorname{arctg}(-\eta) - \operatorname{arctg}\eta = \pi - 2\operatorname{arctg}\eta = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\eta},$$

doch ist in dem letzten Ausdruck der Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu wählen. Indem man diese Vereinfachung benutzt, und die Gleichung

$$-4\pi\varrho = \frac{2i}{c\mu}\left(\frac{\partial v_a}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0}$$

anwendet, so entsteht für die gesuchte Dichtigkeit ϱ dieser Ausdruck:

$$(57.)\qquad \varrho = -\frac{i}{\pi^2 c^2 \mu}\left(\frac{\sigma'}{N} + \frac{\sigma'\mu\mu'}{\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{\mu\mu'}{\sqrt{N}}\right).$$

Das Moment λ wird durch die Gleichung $4\pi\lambda = 2(u_a)_{\sigma=0}$ bestimmt, da u_a zu beiden Seiten gleiche und entgegengesetzte Werthe hat; und diese liefert die Darstellung:

$$(58.)\qquad \lambda = -\frac{1}{\pi^2 c}\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\mu\mu'}{\sqrt{N}};$$

in dieser wie in der vorhergehenden Gleichung liegen die Gröfsen $\operatorname{arctg}\frac{\mu\mu'}{\sqrt{N}}$ zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$, und der Variable μ werden nur positive Werthe gegeben.

Hiermit sind die Fundamentalaufgaben des ersten Paragraphen für den Fall der Kreisscheibe vollständig gelöst; wir beziehen nun die gegebenen Functionen f und g der ersten und der zweiten allgemeinen Aufgabe auf die Coordinaten μ, φ eines Punktes im Kreise vom Radius c, und deuten dies durch die

Zeichen $f(\mu,\varphi)$ und $g(\mu,\varphi)$ an, dann verwandeln sich die allgemeinen Gleichungen (1.) und (6.), durch welche die Probleme der electrostatischen und der electrodynamischen Vertheilung aufgelöst werden, in die folgenden, wo das Element der Kreisfläche $c^2\mu\,\partial\mu\,\partial\varphi$ ist, und die Potentialfunctionen V_a und U_a für den Punkt (σ',μ',φ') gelten:

$$(59.)\quad V_a = -\frac{i}{\pi^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{+\pi} f(\mu,\varphi)\Big[\frac{\sigma'}{N}+\frac{\sigma'\mu\mu'}{\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{\mu\mu'}{\sqrt{N}}\Big]\partial\mu\,\partial\varphi,$$

$$(60.)\quad U_a = -\frac{c}{\pi^2}\int_0^1\int_{-\pi}^{+\pi} g(\mu,\varphi)\Big[\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\mu\mu'}{\sqrt{N}}\Big]\mu\,\partial\mu\,\partial\varphi.$$

In dem Fall, dafs die gegebenen Functionen $f(\mu,\varphi)$ und $g(\mu,\varphi)$ von dem Winkel φ unabhängig sind, ist es wünschenswerth, die Integrale $\int_{-\pi}^{+\pi}\varrho\,\partial\varphi$ und $\int_{-\pi}^{+\pi}\lambda\,\partial\varphi$, wo die Werthe ϱ und λ aus (57.) und (58.) genommen sind, möglichst zu vereinfachen. Dieselben können in elliptische Integrale verwandelt werden; doch ist es zu diesem Zwecke passend, auf die Ausdrücke v_a und u_a in (55.) zurückzugehen, und ich werde mich begnügen, das Integral

$$(61.)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{N(\sigma,\mu,\varphi,\sigma',\mu',\varphi')}}{-\sigma\sigma'+\mu\mu'}\Big)\partial\varphi = W$$

als elliptisches Integral der ersten Gattung darzustellen, woraus die Wahrheit der Behauptung leicht gefolgert werden kann. Es sei der Kürze wegen

$$-\sigma\sigma'+\mu\mu' = \zeta,\quad 2-\sigma^2-\sigma'^2-\mu^2-\mu'^2+2\sigma\sigma'\mu\mu' = a,$$
$$2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2} = b,$$

so ist

$$N = a-b\cos(\varphi-\varphi'),$$

und wendet man die Formel an:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta} = \int_\zeta^\infty\frac{\partial x}{x^2+N},$$

welche für positive und negative Werthe von ζ gilt, da der Bogen zwischen den Grenzen 0 und π zu nehmen ist, so kommt

$$W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\partial\varphi\int_\zeta^\infty\frac{\partial x}{x^2+N}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\partial\varphi}{x^2+a-b\cos(\varphi-\varphi')} = \frac{2\pi}{\sqrt{(x^2+a)^2-b^2}},$$



also giebt die Vertauschung der Integrationen für W den Werth

$$(62.)\qquad W = \int_{\zeta}^{\infty} \frac{\partial x}{\sqrt{(x^2+a)^2-b^2}},$$

der die Form eines elliptischen Integrals erster Gattung hat. Um dasselbe in die canonische Form zu bringen, werde $a-b = N_1$, $a+b = N_2$ gesetzt, und weil $N_2 > N_1$ ist, die Substitution $x = \frac{\sqrt{N_2}}{y}$ angewandt; dann wird W gleich

$$\frac{1}{\sqrt{N_2}} \int_0^{\frac{\sqrt{N_2}}{\zeta}} \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)\left(1+\frac{N_1}{N_2}y^2\right)}},$$ wenn ζ positiv ist, oder gleich

$$\frac{1}{\sqrt{N_2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)\left(1+\frac{N_1}{N_2}y^2\right)}} + \frac{1}{\sqrt{N_2}} \int_0^{\frac{\sqrt{N_2}}{-\zeta}} \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)\left(1+\frac{N_1}{N_2}y^2\right)}},$$

wenn ζ negativ ist. Aus der Gleichung $\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)(1+k^2y^2)}} = w$ folgt aber nach den Grundformeln der elliptischen Functionen

$$iy = \sin\mathrm{am}(i, w, k) = i\,\mathrm{tg\,am}(w, k'),$$

wo $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist, und deshalb $w = \arg\mathrm{tg\,am}(y, k')$. Setzt man daher $\frac{N_1}{N_2} = k^2$, so entsteht die Endgleichung

$$(63.)\qquad W = \frac{1}{\sqrt{N_2}} \arg\mathrm{tg\,am}\left(\frac{\sqrt{N_2}}{\zeta}, k'\right),$$

in der das Argument nach *Jacobis* Bezeichnung zwischen den Grenzen 0 und $2K'$ zu nehmen ist.

Schliefslich sei noch einer andern Form gedacht, die man unter gewissen Voraussetzungen den Ausdrücken V_a und U_a der Gleichungen (59.) und (60.) geben kann. Wenn nämlich das Potential, dessen Werth f in der Kreisfläche bei der ersten Aufgabe, und dessen Differentialquotient g nach der Flächennormale bei der zweiten Aufgabe gegeben war, von Massen herrührt, die aufserhalb eines gewissen die Kreisfläche umschliefsenden Raumes ihren Sitz haben, und wenn dasselbe für jeden Punkt (σ, μ, φ) dieses Raumes bekannt ist, so darf man es sich in eine Reihe entwickelt denken, die in Bezug auf die Gröfsen μ und φ nach Kugelfunctionen fortschreitet, und auch in Bezug auf die Gröfse σ die Form der Reihe (15.) hat. Wenn ferner diese Reihenentwickelung auch dann noch gültig bleibt, sobald in ihr und in dem gegebenen Ausdruck des Potentials, der $f(\sigma, \mu, \varphi)$ sein mag, für die rein imaginäre

Gröfse σ die zwischen den Grenzen -1 und $+1$ liegende Gröfse α substituirt wird, so führen dieselben Betrachtungen, welche zur Herleitung der Gleichungen (50*.) angewandt wurden, zu den folgenden Relationen:

$$(64.)\quad \begin{cases} V_a = \dfrac{-i}{2\pi^2 c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha,\mu,\beta)\frac{\sigma\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\sigma^2-\alpha^2-2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\alpha^2}\cos(\varphi-\beta)}, \\ U_a = \dfrac{-i}{2\pi^2 c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha,\mu,\beta)\frac{\alpha\,\partial\alpha\,\partial\beta}{2-\sigma^2-\alpha^2-2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\alpha^2}\cos(\varphi-\beta)}, \end{cases}$$

wo die Potentialfunctionen V_a und U_a für den Punkt (σ,μ,φ) bestimmt sind. Ist das Potential $f(\sigma,\mu,\varphi)$ von dem Winkel φ unabhängig, so gewinnen sie die noch einfachere Gestalt

$$(65.)\quad \begin{cases} V_a = \dfrac{i}{\pi c}\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(\alpha,\mu)\frac{\sigma\,\partial\alpha}{\sigma^2-\alpha^2}, \\ U_a = \dfrac{i}{\pi c}\displaystyle\int_{-1}^{+1} f(\alpha,\mu)\frac{\alpha\,\partial\alpha}{\sigma^2-\alpha^2}, \end{cases}$$

welche von Herrn *Helmholtz* und Herrn *Bauer* bemerkt ist. Eine von der Reihenentwickelung des Potentials $f(\sigma,\mu,\varphi)$ abstrahirende Untersuchung der Gleichungen (64.) und (65.) würde an dieser Stelle zu weit führen.

§. 8.

Die Fundamentalaufgaben des ersten Paragraphen erlauben in dem Falle, dafs der feste durch A bezeichnete Punkt aufserhalb der gegebenen Fläche S liegt, eine einfache physikalische Interpretation: bei der ersten sei der durch die Fläche S eingeschlossene Raum ein Leiter der statischen Electricität, und in dem Punkte A die negative Einheit des electrischen Fluidums concentrirt, dann ist v_a das Potential der Wirkung, welche die an der Oberfläche von S inducirte electrische Schicht ausübt, nachdem der Körper mit der Erde leitend verbunden ist; bei der zweiten Aufgabe sei der unendliche Raum mit Ausschlufs des durch die Fläche S begrenzten Raumes ein Leiter der dynamischen Electricität, und der Punkt A enthalte die positive Einheit der electrischen Masse (vermöge der Substitution electrischer Massen für Einströmungspunkte der Electricität), dann ist die electrische Spannung in irgend einem Punkte des Leiters gleich der reciproken Entfernung dieses Punktes vom Punkte A vermindert um den Werth der Potentialfunction u_a an derselben Stelle. Wenn wir daher unter der Voraussetzung, dafs die Fläche S ein verlängertes Rotationsellipsoid ist und abnehmend sich der geraden Linie nähert,

jene beiden Potentialfunctionen v_a und u_a für sich allein ins Auge fassen, ohne eine Anwendung auf die allgemeinen Aufgaben des §. 1 zu machen, so hat dies nach dem eben Gesagten seine volle Berechtigung; auch hindert nichts, das Resultat der gleichzeitigen Wirkung mehrerer electrischer Massenpunkte durch Addition der entsprechenden Potentiale darzustellen, und dadurch die Anwendung in anderer Weise zu verallgemeinern.

Die Gleichungen (16.) und (21.) gaben für v_a und u_a diese Ausdrücke:

$$v_a = \frac{i}{c}\sum_0^\infty(2n+1)\sum_0^n b_{n.m}^2 \frac{P_{n.m}(\sigma_0)}{Q_{n.m}(\sigma_0)} Q_{n.m}(\sigma)\, Q_{n.m}(\sigma')\, P_{n.m}(\mu)\, P_{n.m}(\mu') \cos m(\varphi-\varphi'),$$

$$u_a = \frac{i}{c}\sum_0^\infty(2n+1)\sum_0^n b_{n.m}^2 \frac{P'_{n.m}(\sigma_0)}{Q'_{n.m}(\sigma_0)} Q_{n.m}(\sigma)\, Q_{n.m}(\sigma')\, P_{n.m}(\mu)\, P_{n.m}(\mu') \cos m(\varphi-\varphi'),$$

und die Annäherung des verlängerten Ellipsoids an die gerade Linie wird durch die Annäherung der reellen positiven Gröfse σ_0 an die Einheit dargestellt. Da hierbei die Werthe der Functionen $Q_{n.m}(\sigma_0)$ und $Q'_{n.m}(\sigma_0)$ über jede Grenze hinaus zunehmen, so bestand die Aufgabe darin, den Effect dieses Wachsens auf die Potentiale v_a und u_a zu erkennen, und es hat sich gezeigt, dafs das Product von v_a und der Gröfse $\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}$ und das Product von u_a und der Gröfse $\frac{1}{\sigma_0^2-1}$ gegen feste Grenzen convergiren, die in geschlossener Form darstellbar sind. Dies Resultat soll nachgewiesen werden, indem man auf das Verhalten der Gröfsen $P_{n.m}(\sigma_0)$ und $Q_{n.m}(\sigma_0)$ näher eingeht.

Die Gleichung (31*.), durch welche $Q_{n.m}(\sigma)$ auf $P_{n.m}(\alpha)$ zurückgeführt wird,

$$Q_{n.m}(\sigma) = \frac{1}{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}}\int_{-1}^{+1} P_{n.m}(\alpha)(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha},$$

gilt ebensowohl für reelle, die Einheit übertreffende Werthe von σ, wie für rein imaginäre, da $Q_{n.m}(\sigma)$ eine nach Potenzen von $\frac{1}{\sigma}$ entwickelbare Gröfse ist, sobald der analytische Modul von $\frac{1}{\sigma}$ unter der Einheit liegt. Schreibt man unter dem Integralzeichen $(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_{n.0}(\alpha)}{d\alpha^m}$ für $P_{n.m}(\alpha)$, so wird klar, dafs $P_{n.m}(\alpha)(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}$ eine ganze rationale Function von α ist. Nun hat man die identische Gleichung

$$\int_{-1}^{+1}\left[\frac{d^m P_{n.0}(\alpha)}{d\alpha^m}(1-\alpha^2)^m - \frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}(1-\sigma^2)^m\right]\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha} + \frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}(1-\sigma^2)^m\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha}$$
$$= \int_{-1}^{+1}\frac{d^m P_{n.0}(\alpha)}{d\alpha^m}(1-\alpha^2)^m\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha},$$

in der das erste Integral der linken Seite eine ganze rationale Function von σ werden mufs, da $\sigma-\alpha$ in den Ausdruck der Parenthese dividirt werden kann, in der das zweite Integral der linken Seite den Werth

$$-\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}(1-\sigma^2)^m \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$$

hat, und wo die rechte Seite, nach fallenden Potenzen von σ entwickelt, nur negative Potenzen dieser Gröfse enthält. Entwickelt man daher den Ausdruck $\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}(1-\sigma^2)^m \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ nach fallenden Potenzen von σ und nennt das Aggregat der Glieder mit nicht negativen Potenzen $R_{n.m}(\sigma)$, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung nothwendig in die folgende:

$$R_{n.m}(\sigma)-\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}(1-\sigma^2)^m \log\frac{\sigma-1}{\sigma+1} = \int_{-1}^{+1}\frac{d^m P_{n.0}(\alpha)}{d\alpha^m}(1-\alpha^2)^m\frac{\partial\alpha}{\sigma-\alpha},$$

mittelst deren für $Q_{n.m}(\sigma)$ der folgende Ausdruck entsteht, welcher der *Neumann*schen Darstellung von $Q_{n.0}(\sigma)$ in (14.) entspricht:

$$(66.)\qquad Q_{n.m}(\sigma) = (1-\sigma^2)^{-\frac{1}{2}m}R_{n.m}(\sigma)-\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}.$$

Für die Folge ist es wichtig zu wissen, ob die ganze rationale Function von σ $R_{n.m}(\sigma)$ für $\sigma=1$ verschwinden kann, sobald die Zahl m von der Null verschieden ist. Durch Vergleichung von (66.) mit dem früheren Ausdruck

$$Q'_{n.m}(\sigma) = (1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m\left(R_{n.0}(\sigma)-P_{n.0}(\sigma)\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)}{d\sigma^m}$$

findet man aber leicht, dafs $R_{n.1}(1)=2$, und für $m>1$,

$$R_{n.m}(1) = 1.2.3\ldots(m-1).2^m$$

ist, folglich ist die aufgestellte Frage stets zu verneinen.

Wir werden jetzt mittelst der Gleichung (66.) die Grenzen suchen, denen sich die Ausdrücke $\frac{P_{n.m}(\sigma)}{Q_{n.m}(\sigma)}\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ und $\frac{P'_{n.m}(\sigma)}{Q'_{n.m}(\sigma)}\cdot\frac{1}{\sigma^2-1}$ nähern, wenn die reelle Gröfse σ abnehmend in die positive Einheit übergeht. Für's erste ist

$$(67.)\quad \frac{P_{n.m}(\sigma)}{Q_{n.m}(\sigma)}\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1} = \frac{(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}{(1-\sigma^2)^{-\frac{1}{2}m}R_{n.m}(\sigma)-(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}},$$

und man sieht, dafs bei $m=0$ der Grenzwerth von

$$\frac{1}{\dfrac{R_{n.0}(\sigma)}{P_{n.0}(\sigma)\log\dfrac{\sigma-1}{\sigma+1}}-1}$$

die negative Einheit ist, während bei jedem gröfseren m schon der Zähler der rechten Seite in (67.) durch den Factor $(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\log\frac{\sigma-1}{\sigma+1}$ verschwindet, der Nenner aber durch das Glied $(1-\sigma^2)^{-\frac{1}{2}m}R_{n,m}(\sigma)$ unendlich grofs wird, also immer der Grenzwerth Null entsteht. Für's zweite hat man

$$(68.)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{P'_{n.0}(\sigma)}{Q'_{n.0}(\sigma)}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2-1} = \dfrac{P'_{n.0}(\sigma)\dfrac{1}{\sigma^2-1}}{R'_{n.0}(\sigma)-P'_{n.0}(\sigma)\log\dfrac{\sigma-1}{\sigma+1}-2P_{n.0}(\sigma)\dfrac{1}{\sigma^2-1}}, \\[2ex] \dfrac{P'_{n.m}(\sigma)}{Q'_{n.m}(\sigma)}\cdot\dfrac{1}{\sigma^2-1} = \\[2ex] \dfrac{\left[-m\sigma(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m-1}\dfrac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m}+(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\dfrac{d^{m+1}P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^{m+1}}\right]\dfrac{1}{\sigma^2-1}}{m\sigma(1-\sigma^2)^{-\frac{1}{2}m-1}R_{n.m}(\sigma)+(1-\sigma^2)^{-\frac{1}{2}m}R_{n.m}(\sigma)-\dfrac{d}{d\sigma}\left[P_{n.m}(\sigma)\log\dfrac{\sigma-1}{\sigma+1}\right]}, \end{array}\right.$$

und es ergiebt sich bei $m=0$ der Grenzwerth $-\frac{1}{2}\frac{P'_{n.0}(1)}{P_{n.0}(1)} = -\frac{1}{2}P'_{n.0}(1)$, bei $m=1$ der Werth $\frac{P'_{n.0}(1)}{R_{n1}(1)} = \frac{1}{2}P'_{n.0}(1)$, und bei jedem die Eins übertreffenden m der Werth Null.

Nach diesen Vorbereitungen werde der Reihenausdruck von v_a mit $\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}$, der Reihenausdruck von u_a mit $\frac{1}{\sigma_0^2-1}$ multiplicirt; hierbei seien die Reihen nach den cosinus der Vielfachen des Winkels $(\varphi-\varphi')$ geordnet, und die Werthe von σ und σ' um eine endliche Gröfse von der Einheit verschieden. Convergirt jetzt σ_0 gegen die Einheit, während σ und σ' sich nicht ändern, so verschwinden in $v_a\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}$ durch den Factor $\frac{P_{n.m}(\sigma_0)}{Q_{n.m}(\sigma_0)}$ alle Glieder, in denen $m>0$ ist, und in $u_a\frac{1}{\sigma_0^2-1}$ durch den Factor $\frac{P'_{n.m}(\sigma_0)}{Q'_{n.m}(\sigma_0)}$ alle Glieder, in denen $m>1$ ist, und es bleiben die folgenden einfachen Reihen:

$$(69.)\begin{cases} \lim.\left[v_a \log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right] \\ = -\frac{i}{c}\sum_0^\infty \tfrac{1}{2}(2n+1)\,Q_{n.0}(\sigma)\,Q_{n.0}(\sigma')\,P_{n.0}(\mu)\,P_{n.0}(\mu'), \\ \lim.\left[v_a\cdot\frac{1}{\sigma_0^2-1}\right] \\ = -\frac{i}{c}\sum_0^\infty \tfrac{1}{4}(2n+1)\,P'_{n.0}(1)\,Q_{n.0}(\sigma)\,Q_{n.0}(\sigma')\,P_{n.0}(\mu)\,P_{n.0}(\mu') \\ \quad +\frac{i}{c}\sum_0^\infty \tfrac{1}{4}(2n+1)\,b_{n.1}\,Q_{n.1}(\sigma)\,Q_{n.1}(\sigma')\,P_{n.1}(\mu)\,P_{n.1}(\mu')\cos(\varphi-\varphi'), \end{cases}$$

da

$$\lim.\left[\frac{P_{n.0}(\sigma)}{Q_{n.0}(\sigma)}\log\frac{\sigma_0-1}{\sigma_0+1}\right] = -1,\quad \lim.\left[\frac{P'_{n.0}(\sigma)}{Q'_{n.0}(\sigma)}\cdot\frac{1}{\sigma_0^2-1}\right] = -\tfrac{1}{2}P'_{n.0}(1),$$

$$\lim.\left[\frac{P'_{n.1}(\sigma)}{Q'_{n.1}(\sigma)}\cdot\frac{1}{\sigma^2-1}\right] = \tfrac{1}{2}P'_{n.0}(1)$$

ist, und $P'_{n.0}(1)$ den Werth $\frac{1}{2b_{n.1}}$ hat. Um die Reihen in (69.) durch bestimmte Integrale zu summiren, können aus der Gleichung (15.) die passenden Formeln abgeleitet werden. Setzt man $\sigma = 1$, so kommt, weil $P_{n.0}(1) = 1$, und für $m > 1$ der Werth $P_{n.m}(1) = 0$ ist,

$$(70.)\quad \frac{1}{c\sqrt{1-\sigma'^2-\mu^2-\mu'^2+2\sigma'\mu\mu'}} = \frac{i}{c}\sum_0^\infty \tfrac{1}{2}(2n+1)\,Q_{n.0}(\sigma')\,P_{n.0}(\mu)\,P_{n.0}(\mu');$$

und die Differentiation der Gleichung (15.) nach σ giebt

$$\frac{\sigma-\sigma'\mu'\mu-\frac{\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\sqrt{1-\sigma'^2}\cos(\varphi-\varphi')}{c\sqrt{N^3}}$$

$$= \frac{i}{c}\sum_0^\infty(2n+1)\sum_0^n b^2_{n.m}\frac{dP_{n.m}(\sigma)}{d\sigma}\,Q_{n.m}(\sigma')\,P_{n.m}(\mu)\,P_{n.m}(\mu')\cos m(\varphi-\varphi').$$

Läfst man hier σ an die Einheit heranrücken, so wird N von dem Winkel $(\varphi-\varphi')$ unabhängig, und das diesen Winkel nicht enthaltende Aggregat von Gliedern auf der rechten Seite mufs dem entsprechenden auf der linken Seite gleich sein. Es ist aber

$$\frac{dP_{n.m}(\sigma)}{d\sigma} = -m\sigma(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m-1}\frac{d^m P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^m} + (1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^{m+1}P_{n.0}(\sigma)}{d\sigma^{m+1}},$$

und deshalb giebt die Multiplication der ursprünglichen Gleichung mit $(1-\sigma^2)^{\frac{1}{2}}$ und die darauf erfolgende Annäherung von σ an die Einheit die Gleichheit derjenigen Glieder, welche auf beiden Seiten in $\cos(\varphi-\varphi')$ multiplicirt sind,

während alle übrigen verschwinden. Hierdurch entstehen die beiden Relationen

$$(71.)\begin{cases}\dfrac{1-\sigma'\mu\mu'}{c(1-\sigma'^2-\mu^2-\mu'^2+2\sigma'\mu\mu')^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{i}{c}\sum_0^\infty\tfrac{1}{2}(2n+1)P'_{n.0}(1)\,Q_{n.0}(\sigma')\,P_{n.0}(\mu)P_{n.0}(\mu'),\\ \dfrac{\sqrt{1-\sigma'^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}}{c(1-\sigma'^2-\mu^2-\mu'^2+2\sigma'\mu\mu')^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{i}{c}\sum_0^\infty\tfrac{1}{2}(2n+1)b_{n.1}\,Q_{n.1}(\sigma')\,P_{n.1}(\mu)\,P_{n.1}(\mu'),\end{cases}$$

in deren zweiter für $P'_{n.0}(1)$ wieder der Werth $\frac{1}{2b_{n.1}}$ geschrieben ist; auch wird dieselbe aus der Gleichung (39.) durch die Annahme $m=1$ erhalten. Da $\frac{c}{i}$ bei dem verlängerten Rotationsellipsoid nach §. 2 eine reelle Gröfse ist, so ist es passend

$$\sqrt{1-\sigma'^2-\mu^2-\mu'^2+2\sigma'\mu\mu'}=\frac{\sqrt{\sigma'^2+\mu^2+\mu'^2-2\sigma'\mu\mu'-1}}{i}$$

zu setzen, und die reelle Quadratwurzel rechts als positiv zu betrachten; ebenso kann man $\sqrt{1-\sigma'^2}=\frac{\sqrt{\sigma'^2-1}}{i}$ schreiben. Demgemäfs gehen die Gleichungen (70.) und (71.) in die folgenden über:

$$(72.)\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\sigma'^2+\mu^2+\mu'^2-2\sigma'\mu\mu'-1}}=\sum_0^\infty\tfrac{1}{2}(2n+1)\,Q_{n.0}(\sigma')P_{n.0}(\mu)P_{n.0}(\mu'),\\ \dfrac{\sigma'\mu\mu'-1}{(\sigma'^2+\mu^2+\mu'^2-2\sigma'\mu\mu'-1)^{\frac{3}{2}}}=\sum_0^\infty\tfrac{1}{2}(2n+1)P'_{n.0}(1)\,Q_{n.0}(\sigma')P_{n.0}(\mu)P_{n.0}(\mu'),\\ \dfrac{i\sqrt{\sigma'^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}}{(\sigma'^2+\mu^2+\mu'^2-2\sigma'\mu\mu'-1)^{\frac{3}{2}}}=\sum_0^\infty\tfrac{1}{2}(2n+1)b_{n.1}\,Q_{n.1}(\sigma')P_{n.1}(\mu)P_{n.1}(\mu').\end{cases}$$

Durch doppelte Anwendung der ersten, durch Verbindung der ersten und zweiten, und durch doppelte Anwendung der dritten Relation erhält man, vermöge der bekannten Gleichungen

$$\int_{-1}^{+1}P_{n.m}(\alpha)P_{n'.m}(\alpha)\,\partial\alpha=0,\quad \int_{-1}^{+1}P_{n.m}(\alpha)P_{n.m}(\alpha)\,\partial\alpha=\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{b_{n.m}},$$

diese Darstellung der Reihen in (69.) durch elliptische Integrale:

$$(73.)\begin{cases}\lim.\left[v_a\log\dfrac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}\right]=\\ \dfrac{i}{c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{\partial\alpha}{(\alpha^2-2\sigma\mu\alpha+\sigma^2+\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}(\alpha^2-2\sigma'\mu'\alpha+\sigma'^2+\mu'^2-1)^{\frac{1}{2}}},\\ \lim.\left[u_a\dfrac{1}{\sigma_0^2-1}\right]=\\ \dfrac{i}{2c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{1}{(\alpha^2-2\sigma\mu\alpha+\sigma^2+\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(1-\sigma'\mu'\alpha)\partial\alpha}{(\alpha^2-2\sigma'\mu'\alpha+\sigma'^2+\mu'^2-1)^{\frac{3}{2}}}\\ -\dfrac{i}{2c}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{1-\mu^2}}{(\alpha^2-2\sigma\mu\alpha+\sigma^2+\mu^2-1)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{\sigma'^2-1}\sqrt{1-\mu'^2}(1-\alpha^2)\partial\alpha}{(\alpha^2-2\sigma'\mu'\alpha+\sigma'^2+\mu'^2-1)^{\frac{3}{2}}}\cos(\varphi-\varphi'),\end{cases}$$

und es tritt zwischen den beiden Grenzausdrücken der Unterschied hervor, dafs der erstere von den Winkeln φ und φ' ganz unabhängig wird, der zweite aber für jeden um die Rotationsaxe des Ellipsoids symmetrisch liegenden Kreis die Form $a+b\cos(\varphi-\varphi')$ annimmt, wo a und b von den Winkeln unabhängige Gröfsen bedeuten. In Betreff der Integrale sieht man ferner, dafs die in der zweiten Gleichung vorkommenden aus dem Integral der ersten Gleichung durch partielle Differentiation nach den Gröfsen σ, μ, σ', μ' gebildet werden können. Eine Substitution, vermöge deren dieses Integral in die canonische Form übergeht, hat Herr ***Luchterhand*** in dem 17[ten] Bande dieses Journals p. 218 angegeben: setzt man

$$(\sigma'\mu'-\sigma\mu)^2+(\sqrt{\sigma'^2-1}\sqrt{1-\mu'^2}-\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{1-\mu^2})^2 = N^{(1)},$$
$$(\sigma'\mu'-\sigma\mu)^2+(\sqrt{\sigma'^2-1}\sqrt{1-\mu'^2}+\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{1-\mu^2})^2 = N^{(2)},$$
$$k^2 = \frac{N^{(1)}}{N^{(2)}},$$

so folgt aus der Gleichung

$$\frac{1-kx}{1+kx} = \frac{\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{1-\mu^2}\,[(\alpha-\sigma'\mu')^2+(\sigma'^2-1)(1-\mu'^2)]}{\sqrt{\sigma'^2-1}\sqrt{1-\mu'^2}\,[(\alpha-\sigma\mu)^2+(\sigma^2-1)(1-\mu^2)]}$$

die gesuchte Umformung des Integrals

$$(74.)\quad \int_{-1}^{+1}\frac{\partial\alpha}{[(\alpha-\sigma\mu)^2+(\sigma^2-1)(1-\mu^2)]^{\frac{1}{2}}[(\alpha-\sigma'\mu')^2+(\sigma'^2-1)(1-\mu'^2)]^{\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{N^{(2)}}}\int_{x_{-1}}^{x_{+1}}\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

bei der die Grenzen x_{+1} und x_{-1} so zu bilden sind, dafs die stetige Bewegung der Variabeln α und x nirgend unterbrochen wird. Eine wesentliche Vereinfachung wird hier hervorgebracht, wenn man das Integral rechts, zwischen den Grenzen 0 und x_{+1}, und dasselbe Integral, zwischen den Grenzen 0 und x_{-1} genommen, respective gleich der Summe und der Differenz von zwei Integralen setzt, bei denen die Function dieselbe ist und die unteren Grenzen Null sind, die oberen Grenzen aber nach den Additionsformeln der elliptischen Integrale gefunden werden können. Mit Hülfe dieser Betrachtung geht die rechte Seite von (74.) in den Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{N^{(2)}}}\int_0^{\frac{\sqrt{N^{(2)}}}{\sigma\sigma'-\mu\mu'}}\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

oder in den Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{N^{(2)}}}\left(\int_0^1\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\int_{\frac{\sqrt{N^{(2)}}}{\sigma\sigma'-\mu\mu'}}^1\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\right)$$

über, je nachdem die Gröfse $\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{\sigma'^2-1}-\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}$ gröfser oder kleiner als die Null ist. Da nun

$$N^{(2)} = (\sigma\sigma'-\mu\mu')^2-(\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{\sigma'^2-1}-\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2})^2$$

ist, so darf man statt beider Ausdrücke den *einen* schreiben:

$$\frac{2}{\sqrt{N^{(2)}}}\arg.\cos\operatorname{am}\left(\frac{\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{\sigma'^2-1}-\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}}{\sigma\sigma'-\mu\mu'}, k\right),$$

wo das Argument nach *Jacobis* Bezeichnung zwischen 0 und $2K$ zu wählen ist. Mithin bekommt die erste der Gleichungen (73.) die Gestalt

$$(75.)\quad \lim.\left[v_a\log\frac{\sigma_0+1}{\sigma_0-1}\right] = \frac{2i}{c\sqrt{N^{(2)}}}\arg.\cos\operatorname{am}\left(\frac{\sqrt{\sigma^2-1}\sqrt{\sigma'^2-1}-\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}}{\sigma\sigma'-\mu\mu'}, k\right).$$

Die angewandte Transformation gilt übrigens nicht für den besondern Fall, dafs $\sigma=\sigma'$, $\mu=\mu'$ ist; die Integrale in (73.) gehen dann in algebraische und Kreisfunctionen über, welche jedoch vollständig anzugeben nicht belohnend schien. Zum Schlusse mag noch die Bemerkung einen Platz finden, dafs, wenn man bei der von Herrn *Neumann* theoretisch behandelten Magnetisirung eines Rotationsellipsoids als Sitz der inducirenden Kraft einen Magnetpol im Punkte $(\sigma', \mu', \varphi')$ annimmt, das Potential der Wirkung des magnetisirten Körpers auf einen äufsern Punkt (σ, μ, φ) die Anwendung derselben Betrachtungen erlaubt, welche in diesem Paragraphen über die Function u_a angestellt sind und zu der zweiten Gleichung (73.) geführt haben, und dafs das hieraus hervorgehende Resultat ein vollkommen analoges ist.

Bonn, den 6ten October 1859.



Ueber die Erzeugung geometrischer Curven.

(Von Herrn *Guido Härtenberger* zu Feldkirch in Vorarlberg.)

Der gegenwärtigen Abhandlung, welche die Erzeugung geometrischer Curven zum Gegenstande hat, wird die von *Jonquières* im ersten Abschnitte seines: *Essai sur la génération des courbes géometriques et en particulier sur celle de la courbe de quatrième ordre* *) auseinandergesetzte einleitende Theorie zu Grunde gelegt.

Die Erzeugung geometrischer Curven mittelst zweier projectivischen Büschel (Schaaren) verlangt eine Auflösung folgenden Fundamentalproblems, welches *Jonquières* also ausspricht: *Etant donnés autant de points qu'il en faut pour déterminer une courbe de l'ordre m (m étant égal à $n+n'$), former deux faisceaux anharmoniques, de dégrès respectifs n et n', qui engendrent cette courbe.*

§. I.

Auflösung des Fundamentalproblems für den Fall, wenn $n=1$, $n'=m-1$ ist.

Wir beschäftigen uns vor der Hand mit der Auflösung des Fundamentalproblems, wenn $n=1$, $n'=m-1$ genommen wird, d. h. mit der Erzeugung einer durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte bestimmten Curve m^{ter} Ordnung M mittelst der Durchschnitte der correspondirenden Elemente eines Strahlenbüschels P und einer Schaar S von Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Man setze Kürze halber $\frac{1}{2}m(m-1)=p$, und seien:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots\ b_p,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_{2m-1}$$

die gegebenen $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte der Curve M. Werden

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \dots\ b_p$$

als die bekannten Punkte der Basis der Curvenschaar S und a_0 als Centrum des Strahlenbüschels P genommen, so besteht unsere Aufgabe darin, ein System von $m-2$ Punkten $x_1,\ x_2,\ \dots\ x_{m-2}$ der Art zu bestimmen, dafs die beiden Büschel:

$$a_0[a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_{2m-1}],$$
$$(b_1 b_2 b_3 \dots b_p x_1 x_2 \dots x_{m-2})[a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots\ a_{2m-1}]$$

---

*) Extrait du tome XVI des mémoires présentés par divers savants à l'academie des sciences.



projectivisch werden. Eigentlich wird man ein System von $(m-1)^2-p$ Punkten $x_1, x_2, \ldots x_{(m-1)^2-p}$ bestimmen, da die $2m-1$ Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Schaar S, welche durch die $\frac{1}{2}[(m-1)(m+2)-2]$ Punkte

$$b_1, b_2, \ldots b_p, x_1, x_2, \ldots x_{m-2}$$

gehen, auch noch $\frac{1}{2}[m(m-5)+6]$ Punkte $x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots x_{(m-1)^2-p}$ gemein haben.

Das System der Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{(m-1)^2-p}$ ist bestimmt, sobald man irgend zwei Curven aus der Schaar S kennt.

Seien nun A_1 und A_2 die beiden beziehungsweise durch a_1 und a_2 gehenden und den Strahlen a_0a_1 und a_0a_2 des Büschels P correspondirenden Curven der Schaar S.

Die Curve A_1 trifft den Strahl a_0a_1 aufser a_1 noch in jenen $m-2$ Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{m-2}$, welche die Curve M mit diesem Strahle aufser a_0 und a_1 gemein hat. Ebenso schneidet die Curve A_2 den Strahl a_0a_2 aufser a_2 noch in jenen $m-2$ Punkten $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-2}$, in welchen die Curve M diesem Strahle begegnet. Die Curve A_1 ist also durch die Punkte:

$$b_1, b_2, \ldots b_p, a_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-2}$$

und die Curve A_2 durch die Punkte:

$$b_1, b_2, \ldots b_p, a_2, \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_{m-2}$$

vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Die Aufgabe, das System der $(m-1)^2-p$ Punkte $x_1, x_2, \ldots x_{(m-1)^2-p}$ der obigen Bedingung gemäfs zu bestimmen, läfst daher eine einzige Lösung zu.

Ist man nun im Stande, von den beiden Curven A_1 und A_2 noch so viel Elemente zu construiren, als zur Bestimmung derselben noch nothwendig sind, nämlich $m-2$ Elemente von der Curve A_1 und eben so viele von der Curve A_2, so ist unsere Aufgabe gelöst. Als die noch unbekannten zu bestimmenden $2(m-2)$ Elemente der Curven A_1 und A_2 betrachten wir die Tangenten dieser Curven an den $m-2$ Punkten:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots b_{m-2}.$$

Bezeichnet man den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven A_1 und A_2 mit B, so werden die Gleichungen, durch welche diese Tangenten bestimmt werden, dadurch erhalten, dafs man die $2(m-2)$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \ldots \quad B[a_1, a_2, a_3, a_{2m-1}]$$



beziehungsweise gleich setzt den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2m-1}].$$

Die Gleichungen, welche man dadurch zur Bestimmung jener Tangenten erhält, sind linear, indem jede der beiden Curven A_1 und A_2 an irgend einem der Punkte $b_1, b_2, b_3, \dots b_{m-2}$ eine einzige bestimmte Tangente hat.

Wir suchen jetzt die Tangenten der Curven A_1 und A_2 an den Punkten $b_1, b_2, b_3, \dots b_{m-2}$ zu construiren.

Sei $q < m-2$ und man denke sich durch jeden der Punkte

$$b_1, b_2, b_3, \dots b_{q-1}$$

zwei beliebige Gerade gezogen, welche beziehungsweise:

$$b_1t_1^1, \ b_1t_2^1; \ b_2t_1^2, \ b_2t_2^2; \ b_3t_1^3, \ b_3t_2^3; \ \dots \ b_{q-1}t_1^{q-1}, \ b_{q-1}t_2^{q-1}$$

heifsen sollen.

Da wir in Zukunft gewisse Curvenpaare der Art betrachten werden, dafs jedesmal die eine Curve eines solchen Paares durch die Punkte $a_1, b_1, b_2, \dots b_p$ geht und an den Punkten $b_1, b_2, b_3, \dots b_{q-1}$ von den Geraden $b_1t_1^1, b_2t_1^2, b_3t_1^3, \dots b_{q-1}t_1^{q-1}$ berührt wird, während die andere Curve dieses Paares durch die Punkte $a_2, b_1, b_2, \dots b_p$ geht und an den Punkten $b_1, b_2, b_3, \dots b_{q-1}$ von den Geraden $b_1t_2^1, b_2t_2^2, b_3t_2^3, \dots b_{q-1}t_2^{q-1}$ berührt wird, so wollen wir den Inbegriff der $\frac{1}{2}[(m-1)^2+m+2q-1]$ Elemente, nämlich der $p+1$ Punkte $a_1, b_1, b_2, \dots b_p$ und der $q-1$ Tangenten $b_1t_1^1, b_2t_1^2, b_3t_1^3, \dots b_{q-1}t_1^{q-1}$ kurz mit J_1 bezeichnen; ebenso sei J_2 der Inbegriff der $\frac{1}{2}[(m-1)^2+m+2q-1]$ anderen Elemente, nämlich der $p+1$ Punkte $a_2, b_1, b_2, \dots b_p$ und der $q-1$ Tangenten

$$b_1t_2^1, \ b_2t_2^2, \ b_3t_2^3, \ \dots \ b_{q-1}t_2^{q-1}.$$

Seien nun U_1 und U_2 zwei beziehungsweise durch die Elemente J_1 und J_2 bestimmte und am Punkte b_q von den beliebig angenommenen Geraden $b_qt_1^q$ und $b_qt_2^q$ berührte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Tangenten an den Punkten $b_{q+1}, b_{q+2}, b_{q+3}, \dots b_{m-2}$ ferner dadurch bestimmt sind, dafs, wenn B_u den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven U_1 und U_2 bezeichnet, die $2(m-q-2)$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B_u[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B_u[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad B_u[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-1}]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-1}].$$



Seien ferner Z_1 und Z_2 zwei ebenfalls beziehungsweise durch die Elemente J_1 und J_2 bestimmte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Tangenten an den Punkten b_q, b_{q+1}, b_{q+2}, ... b_{m-2} ferner dadurch bestimmt sind, dafs die $2(m-q-1)$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B_z[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B_z[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad B_z[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)+1}]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)+1}],$$

wo B_z den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven Z_1 und Z_2 bezeichnet.

Es werde jetzt vorausgesetzt, dafs man die Tangenten der Curven U_1 und U_2 an den Punkten b_{q+1}, b_{q+2}, ... b_{m-2} zu construiren wisse.

Der Zweck der folgenden Untersuchungen, um denselben vorläufig vor Augen zu haben, ist nun zu zeigen, wie die Tangenten der Curven Z_1 und Z_2 an den Punkten b_q, b_{q+1}, ... b_{m-2} construirt werden können, wenn die Tangenten der Curven U_1 und U_2 an den Punkten b_{q+1}, b_{q+2}, ... b_{m-2} bekannt sind.

Ableitung der Curven Z_1 und Z_2 aus den Curven U_1 und U_2.

Die Tangenten der Curve U_1 an den Punkten b_q, b_{q+1}, ... b_{m-2} treffen eine willkürlich angenommene feste Gerade L_1 beziehungsweise in den Punkten l_1^q, l_1^{q+1}, l_1^{q+2}, ... l_1^{m-2}. Ebenso schneiden die Tangenten der Curve U_2 an den Punkten b_q, b_{q+1}, ... b_{m-2} eine zweite feste Gerade L_2 beziehungsweise in den Punkten l_2^q, l_2^{q+1}, ... l_2^{m-2}.

Man ziehe die Verbindungslinien $l_1^q l_2^q$, $l_1^{q+1} l_2^{q+1}$, ... $l_1^{m-2} l_2^{m-2}$, welche wir im Gegensatze zu den Tangentenpaaren:

$$b_q t_1^q, \; b_q t_2^q; \; b_{q+1} t_1^{q+1}, \; b_{q+1} t_2^{q+1}; \; \dots \; b_{m-2} t_1^{m-2}, \; b_{m-2} t_2^{m-2}$$

Secanten heifsen und kurz mit:

$$u_q, \; u_{q+1}, \; u_{q+2}, \; \dots \; u_{m-2}$$

bezeichnen wollen.

Lassen wir jetzt die Curven U_1 und U_2 sich dadurch ändern, dafs die den Tangenten dieser Curven am Punkte b_q zugehörige Secante u_q nacheinander verschiedene Lagen u_q^1, u_q^2, u_q^3, ... u_q^n einnimmt, während die übrigen Bestimmungen dieselben bleiben. Irgend einer Secante u_q^n entspricht ein gewisses Curvenpaar U_1^n, U_2^n. Man erhält so eine Reihe R_u von Curvenpaaren:

$$U_1, \; U_2; \; U_1^1, \; U_2^1; \; \dots \; U_1^n, \; U_2^n$$

und diesen entsprechend die Secantenreihen:

$$\begin{array}{lllll} u_q, & u_{q+1}, & u_{q+2}, & \ldots & u_{m-2}, \\ u_q^1, & u_{q+1}^1, & u_{q+2}^1, & \ldots & u_{m-2}^1, \\ u_q^2, & u_{q+1}^2, & u_{q+2}^2, & \ldots & u_{m-2}^2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_q^n, & u_{q+1}^n, & u_{q+2}^n, & \ldots & u_{m-2}^n. \end{array}$$

Da die Aufgabe die Curven U_1 und U_2 den obigen Bedingungen gemäfs zu bestimmen natürlich nur eine einzige Lösung zuläfst, so entspricht *irgend einer* Secante u_q eine *einzige* Secante u_{q+1}, eine *einzige* Secante u_{q+2}, u. s. w. Würde man ferner eine der Secanten u_{q+1}, u_{q+2}, ... u_{m-2}, z. B. die Secante u_{q+1}, willkürlich angenommen, die übrigen Secanten u_q, u_{q+2}, ... u_{m-2} dagegen den nämlichen Bedingungen gemäfs bestimmt haben, wie die Secanten u_{q+1}, u_{q+2}, ... u_{m-2} bestimmt worden sind, so würde man natürlich wieder eine *einzige* Secante u_q, eine *einzige* Secante u_{q+2}, u. s. w. gefunden haben. Es entspricht also auch *umgekehrt* irgend einer der Secanten

$$u_{q+1}, \quad u_{q+2}, \quad \ldots \quad u_{m-2}$$

eine einzige Secante u_q.

Irgend zwei der Secantenreihen:

$$\begin{array}{lllll} u_q, & u_q^1, & u_q^2, & \ldots & u_q^n, \\ u_{q+1}, & u_{q+1}^1, & u_{q+1}^2, & \ldots & u_{q+1}^n, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m-2}, & u_{m-2}^1, & u_{m-2}^2, & \ldots & u_{m-2}^n \end{array}$$

sind daher kraft des Princips der anharmonischen Correspondenz zwei *projectivische Systeme*. Wählt man also die Secanten u_q, u_q^1, u_q^2, ... u_q^n so, dafs dieselben alle durch irgend einen festen Punkt f_q hindurchgehen, so werden auch die Secanten der übrigen Reihen durch feste Punkte hindurchgehen, welche wir beziehungsweise mit f_{q+1}, f_{q+2}, ... f_{m-2} bezeichnen wollen. Man erhält so $m-q-1$ untereinander projectivische Strahlenbüschel, deren Centra die Punkte f_q, f_{q+1}, ... f_{m-2} sind, und welche wir kürzweg mit

$$f_q, \quad f_{q+1}, \quad f_{q+2}, \quad \ldots \quad f_{m-2}$$

bezeichnen wollen.

Seien nun V_1 und V_2 zwei beziehungsweise durch die Elemente J_1 und J_2 bestimmte und am Punkte b_q ebenfalls von den Geraden $b_q t_1^q$ und $b_p t_2^q$ berührte Curven $(m-1)^{ter}$ Ordnung, deren Tangenten an den Punkten

$b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{m-2}$ ferner dadurch bestimmt sind, dafs, wenn B_v den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven V_1 und V_2 bezeichnet, die $2(m-q-2)$ anharmonischen Verhältnisse:

$B_v[a_1, a_2, a_3, a_4], B_v[a_1, a_2, a_3, a_5], \ldots B_v[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-2}], B_v[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}]$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \ldots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-2}], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}].$

Da die Curven V_1 und V_2 durch ganz ähnliche Bedingungen bestimmt sind, wie die Curven U_1 und U_2, so gilt auch hier die Voraussetzung, dafs man die Tangenten der Curven V_1 und V_2 an den Punkten $b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{m-2}$ zu construiren wisse, dafs also diese Tangenten bekannt sind. Seien $v_{q+1}, v_{q+2}, \ldots v_{m-2}$ die den Tangenten der Curven V_1 und V_2 an den Punkten $b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{m-2}$ zugehörigen Secanten, welche zu den Curven V_1 und V_2 in derselben Beziehung stehen, wie die Secanten $u_{q+1}, u_{q+2}, \ldots u_{m-2}$ zu den Curven U_1 und U_2.

Man lasse jetzt die Curven V_1 und V_2 auf gleiche Weise sich ändern, wie die Curven U_1 und U_2, nämlich dadurch, dafs sich die den Tangenten der Curven V_1 und V_2 am Punkte b_q zugehörige Secante u_q beständig um den festen Punkt f_q dreht. Es werden sich dann auch die Secanten $v_{q+1}, v_{q+2}, \ldots v_{m-2}$ um feste Punkte drehen, welche beziehungsweise $g_{q+1}, g_{q+2}, \ldots g_{m-2}$ heifsen sollen. Man erhält so wieder $m-q-1$ untereinander projectivische Strahlenbüschel, deren Centra die Punkte $f_q, g_{q+1}, \ldots g_{m-2}$ sind und welche wir kurz mit

$$f_q, \quad g_{q+1}, \quad g_{q+2}, \quad \ldots \quad g_{m-2}$$

bezeichnen wollen.

Irgend einer durch f_q gehenden Secante u_q^n entspricht ein gewisses Curvenpaar V_1^n, V_2^n; man erhält so eine Reihe R_v von Curvenpaaren:

$$V_1, V_2; \quad V_1^1, V_2^1; \quad \ldots \quad V_1^n, V_2^n.$$

Seien jetzt W_1 und W_2 zwei beziehungsweise durch die Elemente J_1 und J_2 bestimmte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren $2(m-q-1)$ Tangenten an den Punkten $b_q, b_{q+1}, \ldots b_{m-2}$ durch folgende $2(m-q-1)$ Bedingungen bestimmt werden:

1) dafs die $2(m-q)-3$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B_w[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B_w[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \ldots \quad B_w[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \ldots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}],$$

wo B_w den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven W_1 und W_2 bezeichnet;

2) dafs die den Tangenten der Curven W_1 und W_2 am Punkte b_q zugehörige Secante w_q durch den festen Punkt f_q geht.

Das Curvenpaar W_1, W_2 gehört nun, wie man leicht sieht, sowohl in die Reihe R_u als auch in die Reihe R_v. Sind also $w_{q+1}, w_{q+2}, \dots w_{m-2}$ die den Tangenten der Curven W_1 und W_2 an den Punkten

$$b_{q+1}, \quad b_{q+2}, \quad \dots \quad b_{m-2}$$

zugehörigen Secanten, so gehen diese beziehungsweise sowohl durch die Punkte $f_{q+1}, f_{q+2}, \dots f_{m-2}$ als auch durch die Punkte $g_{q+1}, g_{q+2}, \dots g_{m-2}$.

Die Secanten $w_{q+1}, w_{q+2}, \dots w_{m-2}$ fallen also mit den Verbindungslinien $f_{q+1}g_{q+1}, f_{q+2}g_{q+2}, \dots f_{m-2}g_{m-2}$ zusammen.

Construirt man also den dem Strahle $f_{q+1}g_{q+1}$ des Büschels f_{q+1} correspondirenden Strahl des Büschels f_q, so ist dieser Strahl die den Tangenten der Curven W_1 und W_2 am Punkte b_q zugehörige Secante w_q.

Da nun die Aufgabe, die beiden Curven W_1 und W_2 den obigen Bedingungen gemäfs zu bestimmen, eine *einzige* Lösung zuläfst und also von dem *ganz beliebig* angenommenen Punkte f_q eine *einzige* Secante der Art gezogen werden kann, dafs die dieser Secante zugehörigen Curven W_1 und W_2 den obigen Bedingungen genügen, so folgt, dafs die Secante w_q jederzeit durch einen *festen unveränderlichen* Punkt O geht, was auch der Punkt f_q für eine Lage hat. Den Punkt O erhält man dadurch, dafs man f_q eine zweite beliebige Lage f'_q einnehmen läfst und die diesem Punkte f'_q entsprechende Secante w'_q construirt. Die beiden Secanten w_q und w'_q schneiden sich im Punkte O.

Die Bedeutung und Eigenschaft des Punktes O ist folgende:

Zieht man durch O irgend eine Secante x_q und sind X_1 und X_2 zwei beziehungsweise durch die Elemente J_1 und J_2 bestimmte und am Punkte b_q von den der Secante x_q zugehörigen Tangenten berührte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Tangenten an den Punkten $b_{q+1}, b_{q+2}, \dots b_{m-2}$ dadurch bestimmt sind, dafs, wenn B_x den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven X_1 und X_2 bezeichnet, die $2(m-q-2)$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B_x[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B_x[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad B_x[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-1}]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \dots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-1}],$$



so ist auch das anharmonische Verhältnifs:

$$B_x[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}]$$

gleich dem anharmonischen Verhältnisse:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}].$$

Man lasse jetzt die beiden Curven X_1 und X_2 sich dadurch ändern, dafs die Secante x_q sich beständig um den Punkt O dreht; irgend einer durch O gehenden Secante x_q^n entspricht ein gewisses Curvenpaar X_1^n, X_2^n.

Man erhält so eine Reihe R_x von Curvenpaaren:

$$X_1,\ X_2;\quad X_1^1,\ X_2^1;\quad \ldots\quad X_1^n,\ X_2^n$$

und ihnen entsprechend die Secantenreihe:

$$x_q,\quad x_q^1,\quad x_q^2,\quad \ldots\quad x_q^n.$$

Irgend ein Curvenpaar X_1^n, X_2^n der Reihe R_x hat die Eigenschaft, dafs, wenn man den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven X_1^n und X_2^n mit B_x^n bezeichnet, die $2(m-q)-3$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B_x^n[a_1, a_2, a_3, a_4],\quad B_x^n[a_1, a_2, a_3, a_5],\quad \ldots\quad B_x^n[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}]$$

beziehungsweise gleich sind den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4],\quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5],\quad \ldots\quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)}].$$

Sei R_y eine Reihe von Curvenpaaren:

$$Y_1,\ Y_2;\quad Y_1^1,\ Y_2^1;\quad \ldots\quad Y_1^n,\ Y_2^n,$$

welche eine ähnliche Bedeutung und Eigenschaft haben, wie jene der Reihe R_x, nämlich diese, dafs, wenn B_y^n den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven Y_1^n und Y_2^n bezeichnet, die $2(m-q)-3$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B_y^n[a_1, a_2, a_3, a_4],\ B_y^n[a_1, a_2, a_3, a_5], \ldots\ B_y^n[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-1}],\ B_y^n[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)+1}]$$

beziehungsweise gleich sind den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4],\ a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \ldots\ a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)-1}],\ a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2(m-q)+1}].$$

Die den Curvenpaaren der Reihe R_y entsprechenden Secanten seien:

$$y_q,\quad y_q^1,\quad y_q^2,\quad \ldots\quad y_q^n.$$

Diese Secanten laufen ebenfalls alle in einem Punkte O' zusammen, welcher zur Reihe R_y in derselben Beziehung steht, wie der Punkt O zur Reihe R_x und auch durch dieselben Prozesse construirt wird, wie der Punkt O. Man sieht nun auf der Stelle, dafs das Curvenpaar Z_1, Z_2, um dessen Bestimmung

es sich handelt, sowohl der Reihe R_x als auch der Reihe R_y angehört. Ebenso gehört die den Tangenten der Curven Z_1 und Z_2 am Punkte b_q zugehörige Secante z_q sowohl in die Reihe $x_q, x_q^1, x_q^2, \ldots x_q^n$, als auch in die Reihe $y_q, y_q^1, y_q^2, \ldots y_q^n$.

Die Secante z_q geht also sowohl durch den Punkt O als auch durch den Punkt O'.

Trifft nun die Verbindungslinie OO' die Gerade L_1 im Punkte o_1, die Gerade L_2 im Punkte o_2, so ist $b_q o_1$ die Tangente der Curve Z_1 am Punkte b_q und $b_q o_2$ die Tangente der Curve Z_2 an diesem Punkte.

Durch dieselben Prozesse können die Tangenten der Curven Z_1 und Z_2 an den Punkten $b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{m-2}$ construirt werden. Die Curven Z_1 und Z_2 sind also durch eine genügende Anzahl von Elementen bestimmt.

So wie nun aus den Curven U_1 und U_2 die Curven Z_1 und Z_2 abgeleitet worden sind, so können durch dieselben Vorgänge aus den Curven Z_1 und Z_2 zwei Curven C_1 und C_2 abgeleitet werden, welche zu den Curven Z_1 und Z_2 in derselben Beziehung stehen, wie diese zu U_1 und U_2. Aus C_1 und C_2 kann man wieder zwei Curven D_1 und D_2 ableiten, die sich zu C_1 und C_2 ebenso verhalten, wie die Curven C_1 und C_2 zu Z_1 und Z_2.

Man sieht wie man so weiter gehen und schliefslich auf zwei Curven kommen kann, welche beziehungsweise durch die Punkte $a_1, b_1, b_2, b_3, \ldots b_p$ und $a_2, b_1, b_2, b_3, \ldots b_p$ gehen und deren Tangenten an den Punkten $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{m-2}$ dadurch bestimmt sind, dafs, wenn B den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte dieser zwei Curven bezeichnet, die $2(m-2)$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \ldots \quad B[a_1, a_2, a_3, a_{2m-1}]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad \ldots \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_{2m-1}].$$

Die so bestimmten Curven sind aber offenbar nichts anderes als die beiden Curven A_1 und A_2 der Schaar S, welche den Strahlen $a_0 a_1$ und $a_0 a_2$ des Büschels P correspondiren.

Sind aber die beiden Curven A_1 und A_2 bestimmt, dann ist das Fundamentalproblem gelöst.

Es handelt sich also jetzt nur noch darum, für irgend einen Werth von q, der kleiner ist als $m-2$, die Tangenten der Curven U_1 und U_2 an den Punkten $b_{q+1}, b_{q+2}, \ldots b_{m-2}$ zu construiren.



Wir lösen jetzt diese Aufgabe für den Fall, wo $q = m - 3$ genommen wird.

Bestimmung der Curven U_1 und U_2 für den Fall, wo $q = m - 3$ ist.

Die Curve U_1 geht durch die Punkte $a_1, b_1, b_2, \ldots b_p$ und wird an den Punkten $b_1, b_2, \ldots b_{m-3}$ von den beliebig angenommenen Geraden $b_1 t_1^1, b_2 t_1^2, b_3 t_1^3, \ldots b_{m-3} t_1^{m-3}$ berührt; die Curve U_2 geht durch die Punkte $a_2, b_1, b_2, \ldots b_p$ und wird an den Punkten $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{m-3}$ von den beliebig angenommenen Geraden $b_1 t_2^1, b_2 t_2^2, b_3 t_2^3, \ldots b_{m-3} t_2^{m-3}$ berührt.

Man bezeichne den Inbegriff der $m+p-2$ Elemente, nämlich der $p+1$ Punkte $a_1, b_1, b_2, \ldots b_p$ und der $m-3$ Tangenten $b_1 t_1^1, b_2 t_1^2, b_3 t_1^3, \ldots b_{m-3} t_1^{m-3}$ kurz mit E_1; ebenso sei E_2 der Inbegriff der $m+p-2$ anderen Elemente, nämlich der $p+1$ Punkte $a_2, b_1, b_2, b_3, \ldots b_p$ und der $m-3$ Tangenten $b_1 t_2^1, b_2 t_2^2, b_3 t_2^3, \ldots b_{m-3} t_2^{m-3}$.

Die Tangenten der Curven U_1 und U_2 am Punkte b_{m-2} sind dadurch bestimmt, dafs, wenn B_u den Inbegriff der $(m-1)^2$ Durchschnittspunkte der Curven U_1 und U_2 bezeichnet, die zwei anharmonischen Verhältnisse:

$$B_u[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B_u[a_1, a_2, a_3, a_5]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5].$$

Unsere Aufgabe ist, die so bestimmten Tangenten zu construiren.

Man ziehe durch den Punkt b_{m-2} zwei beliebige Gerade $b_{m-2} t_1$ und $b_{m-2} t_2$.

Seien nun $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zwei beziehungsweise durch die Elemente E_1 und E_2 bestimmte und am Punkte b_{m-2} von den Geraden $b_{m-2} t_1$ und $b_{m-2} t_2$ berührte Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Durchschnittspunkte der Curven $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bestimmen mit den beiden Punkten a_3 und a_4 beziehungsweise die beiden Curven $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$. Die Tangenten dieser beiden Curven am Punkte b_{m-2} seien beziehungsweise: $b_{m-2} t_3$ und $b_{m-2} t_4$.

Die vier Tangenten $b_{m-2} t_1, b_{m-2} t_2, b_{m-2} t_3, b_{m-2} t_4$ der Curven $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ am Punkte b_{m-2} schneiden eine beliebig angenommene Gerade G beziehungsweise in den vier Punkten g_1, g_2, g_3, g_4.

Man lasse nun, während die Curve $\mathfrak{A}_1$, mithin auch der Punkt g_1 fest bleibt, die Curve $\mathfrak{A}_2$ sich dadurch ändern, dafs die Tangente der Curve $\mathfrak{A}_2$ am Punkte b_{m-2} verschiedene Richtungen und mithin der Punkt g_2 nach ein-

ander verschiedene Lagen g_2^1, g_2^2, ... g_2^n einnimmt. Es werden sich dann auch die Curven $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ und ihnen entsprechend die Lagen der Punkte g_3 und g_4 ändern.

Man erhält so drei Reihen von Curven:

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_2^1, & \mathfrak{A}_2^2, & \dots & \mathfrak{A}_2^n, \\ \mathfrak{A}_3, & \mathfrak{A}_3^1, & \mathfrak{A}_3^2, & \dots & \mathfrak{A}_3^n, \\ \mathfrak{A}_4, & \mathfrak{A}_4^1, & \mathfrak{A}_4^2, & \dots & \mathfrak{A}_4^n, \end{array}$$

und ihnen entsprechend die drei Punktreihen:

$$\begin{array}{ccccc} g_2, & g_2^1, & g_2^2, & \dots & g_2^n, \\ g_3, & g_3^1, & g_3^2, & \dots & g_3^n, \\ g_4, & g_4^1, & g_4^2, & \dots & g_4^n. \end{array}$$

Werden die Orte der Punkte g_2, g_3, g_4 auf G durch ihre Entfernungen vom Punkte g_1 bestimmt und setzt man Kürze halber $g_1g_2 = d_2$, $g_1g_3 = d_3$, $g_1g_4 = d_4$, so behaupte ich, dafs die wechselseitige Abhängigkeit der Entfernungen der Punkte g_2, g_3, g_4 von g_1 durch folgende zwei Gleichungen characterisirt wird:

$$\text{(I.)} \qquad d_2d_3 + \alpha d_2 + \beta d_3 = 0,$$

$$\text{(II.)} \qquad d_2d_4 + \alpha' d_2 + \beta' d_4 = 0.$$

Behufs des Beweises dieser Behauptung mufs folgender Hülfssatz vorausgeschickt werden:

Ist R_1 eine Curve n^{ter} Ordnung, welche durch ein System Σ von $\frac{1}{2}(n^2+n)$ gegebenen Punkten p_1, p_2, p_3, ... $p_{\frac{1}{2}(n^2+n)}$ geht, ferner noch dadurch bestimmt ist, dafs sie an den $n-1$ Punkten p_1, p_2, p_3, ... p_{n-1} von gegebenen Geraden berührt wird und durch irgend einen Punkt P_1 geht, so kann durch jenes System Σ und durch irgend einen Punkt P_3 eine einzige am Punkte p_{n-1} von einer gegebenen Geraden berührte Curve R_3 der Art gelegt werden, dafs die durch die Durchschnittspunkte der Curven R_1 und R_3 und den beliebigen Punkt P_2 gelegte Curve R_2 an den Punkten p_1, p_2, ... p_{n-2} von gegebenen Geraden berührt wird.

Um uns nicht länger aufzuhalten, nehmen wir diesen Satz vorläufig als bewiesen an; nachträglich geben wir dann einen Beweis desselben.

Es entspricht nun *irgend einem* Punkte g_2 *ein einziger* Punkt g_3 und ein *einziger* Punkt g_4. Vermöge des eben angeführten Hülfssatzes entspricht aber auch *umgekehrt* irgend einem der Punkte g_3, g_4 ein *einziger* Punkt g_2.

Daraus folgt nun zunächst, dafs die Abhängigkeit der Lagen der Punkte g_2, g_3, g_4 durch zwei Gleichungen folgender Form bestimmt wird:

$$(1.)\quad d_2 d_3 + \alpha d_2 + \beta d_3 + \gamma = 0,$$
$$(2.)\quad d_2 d_4 + \alpha' d_2 + \beta' d_4 + \gamma' = 0.$$

Die Coefficienten γ und γ' sind aber, wie leicht gezeigt werden kann, jederzeit gleich 0. Denn fällt die Tangente der Curve $\mathfrak{A}_2$ am Punkte b_{m-2} mit der Tangente der Curve $\mathfrak{A}_1$ an diesem Punkte zusammen, ist also $d_2 = 0$, so berühren sich die beiden Curven $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ im Punkte b_{m-2} und folglich vereinigen sich in b_{m-2} zwei der Durchschnittspunkte der Curven $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Die Curven $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$, welche durch diese Durchschnittspunkte hindurchgehen, werden also beide von den Curven $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ im Punkte b_{m-2} berührt, folglich fallen die Tangenten der Curven $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$ mit der Tangente der Curve $\mathfrak{A}_1$ an diesem Punkte zusammen, d. h. es wird $d_3 = 0$ und $d_4 = 0$. Da also für $d_2 = 0$ auch $d_3 = 0$ und $d_4 = 0$ wird, so müssen die Coefficienten γ und γ' gleich 0 sein.

Die Gleichungen (1.) und (2.) werden also:

$$d_2 d_3 + \alpha d_2 + \beta d_3 = 0,$$
$$d_2 d_4 + \alpha' d_2 + \beta' d_4 = 0,$$

welches eben die aufgestellten Gleichungen (I.) und (II.) sind. Sucht man mittelst dieser Gleichungen das anharmonische Verhältnifs der vier Punkte g_1, g_2, g_3, g_4 als Function von d_2 auszudrücken, so erhält man eine Gleichung folgender Form:

$$(\text{III.})\quad V d_2 + \lambda V + \mu d_2 + \nu = 0,$$

wo V das anharmonische Verhältnifs der vier Punkte g_1, g_2, g_3, g_4 bezeichnet.

Die Gleichung (III.) sagt, dafs irgend einer Lage des Punktes g_2, also auch irgend einer Curve $\mathfrak{A}_2$, ein einziges anharmonisches Verhältnifs und umgekehrt entspricht. Um für irgend einen Werth von d_2 den zugehörigen Werth von V und umgekehrt zu finden, braucht man blofs irgend drei zusammengehörige Werthe von d_2 und V zu kennen; diese können aber jederzeit direct durch Construction gefunden werden.

Man denke sich jetzt den Punkt g_2 so bestimmt, dafs das anharmonische Verhältnifs V gleich wird dem anharmonischen Verhältnisse

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4]$$

und bezeichne den so bestimmten Punkt mit K.



Die dieser Lage des Punktes g_2 entsprechende der Reihe $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2^1, \ldots \mathfrak{A}_2^n$ angehörige Curve heifse $\mathfrak{A}_2^\alpha$ und ihre Tangente am Punkte b_{m-2} sei $b_{m-2}t_2^\alpha$.

Unter den verschiedenen Methoden, nach welchen der Punkt K_2 construirt werden kann, dürfte folgende einfach sein:

Man ziehe durch irgend einen der Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, z. B. durch a_1, drei Strahlen $a_1\mathfrak{a}$, $a_1\mathfrak{a}'$, $a_1\mathfrak{a}''$ der Art, dafs die drei anharmonischen Verhältnisse:

$$a_1[\mathfrak{a}, a_2, a_3, a_4], \qquad a_1[\mathfrak{a}', a_2, a_3, a_4], \qquad a_1[\mathfrak{a}'', a_2, a_3, a_4]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:

$$b_{m-2}[g_1, g_2, g_3, g_4], \quad b_{m-2}[g_1, g_2^1, g_3^1, g_4^1], \quad b_{m-2}[g_1, g_2^2, g_3^2, g_4^2].$$

Seien nun e, e', e'' die Punkte, in welchen die Strahlen $a_1\mathfrak{a}$, $a_1\mathfrak{a}'$, $a_1\mathfrak{a}''$ beziehungsweise von den Tangenten $b_{m-2}g_2$, $b_{m-2}g_2^1$, $b_{m-2}g_2^2$ getroffen werden.

Die fünf Punkte e, e', e'', b_{m-2}, a_1 bestimmen einen Kegelschnitt Q; ebenso bestimmen die fünf Punkte a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 einen zweiten Kegelschnitt C.

Man construire die Tangente am Punkte a_1 des Kegelschnittes C, und sei c der Punkt, in welchem der Kegelschnitt Q von dieser Tangente getroffen wird.

Die Verbindungslinie $b_{m-2}c$ trifft die Gerade G in dem gesuchten Punkte K_2 und $b_{m-2}c$ ist die verlangte Tangente $b_{m-2}t_2^\alpha$.

Von der Richtigkeit der Construction überzeugt man sich wohl leicht.

Man lasse jetzt die Curve $\mathfrak{A}_1$ sich dadurch ändern, dafs der Punkt g_1 auf G nach einander verschiedene Lagen g_1^1, g_1^2, ... g_1^n einnimmt und seien K_2^1, K_2^2, ... K_2^n die entsprechenden Lagen des Punktes K_2.

Irgend einem Punkte g_1^n entspricht eine gewisse Curve $\mathfrak{A}_1^n$; man erhält so eine Curvenreihe:

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1^1, \quad \mathfrak{A}_1^2, \quad \ldots \quad \mathfrak{A}_1^n.$$

Es entspricht nun ***irgend einem*** Punkte g_1 ***ein einziger*** Punkt K_2; würde man ferner den Punkt K_2 beliebig angenommen und den Punkt g_1 derselben Bedingung gemäfs bestimmt haben, wie den Punkt K_2, so würde man natürlich einen ***einzigen*** solchen Punkt g_1 gefunden haben. Es entspricht also auch ***umgekehrt irgend einem*** Punkte K_2 ein ***einziger*** Punkt g_1. Daraus folgt, dafs die beiden Punktreihen:

$$\begin{array}{ccccc} g_1, & g_1^1, & g_1^2, & \ldots & g_1^n, \\ K_2, & K_2^1, & K_2^2, & \ldots & K_2^n \end{array}$$



projectivisch sind und dafs also, während die Tangente $b_{m-2}t_1$ sich um b_{m-2} dreht und einen Strahlenbüschel s erzeugt, die Tangente $b_{m-2}t_2^{\alpha}$ einen mit s projectivischen Strahlenbüschel beschreibt.

Man denke sich jetzt den Punkt g_2 so bestimmt, dafs das anharmonische Verhältnifs V gleich wird dem anharmonischen Verhältnisse:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_5]$$

und bezeichne den so bestimmten Punkt mit L_2. Die dieser Lage des Punktes g_2 entsprechende der Reihe $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2^1$, ... $\mathfrak{A}_2^n$ angehörige Curve sei $\mathfrak{A}_2^{\beta}$ und ihre Tangente am Punkte b_{m-2} heifse $b_{m-2}t_2^{\beta}$. Es entspricht wieder irgend einem Punkte g_1 ein einziger Punkt L_2 und umgekehrt.

Nimmt also der Punkt g_1 nach einander verschiedene Lagen $g_1^1, g_1^2, \dots g_1^n$ ein und sind L_2^1, L_2^2, ... L_2^n die entsprechenden Lagen des Punktes L_2, so sind die beiden Punktreihen:

$$\begin{array}{ccccc} g_1, & g_1^1, & g_1^2, & \dots & g_1^n \\ L_2, & L_2^1, & L_2^2, & \dots & L_2^n \end{array}$$

projectivisch, und mithin ist auch der Strahlenbüschel, welchen die Tangente $b_{m-2}t_2^{\beta}$ beschreibt, projectivisch mit dem Büschel s, welcher von der um b_{m-2} sich drehenden Tangente $b_{m-2}t_1$ erzeugt wird.

Seien nun u_1 und u_2 die beiden Punkte, in welchen die Tangenten der Curven U_1 und U_2 am Punkte b_{m-2} die Gerade G treffen. Der Punkt u_2 gehört nun, wie man leicht einsieht, sowohl in die Reihe:

$$K_2, \quad K_2^1, \quad K_2^2, \quad \dots \quad K_2^n$$

als auch in die Reihe:

$$L_2, \quad L_2^1, \quad L_2^2, \quad \dots \quad L_2^n.$$

Dieser Punkt u_2 ist also ein *Doppelpunkt* der beiden projectivischen Punktreihen K_2, K_2^1, ... K_2^n und L_2, L_2^1, ... L_2^n. Den anderen von u_2 verschiedenen Doppelpunkt dieser beiden Reihen findet man durch folgende Betrachtung:

Unter der Schaar der Curven $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1^1$, $\mathfrak{A}_1^2$, ... $\mathfrak{A}_1^n$ giebt es immer eine, die zugleich durch a_2 geht, und ihre Tangente in b_{m-2} ist *Doppelstrahl* für die beiden projectivischen Strahlenbüschel, welche die Tangenten $b_{m-2}t_1$ und $b_{m-2}t_2^{\alpha}$ beschreiben. Das Nämliche gilt für die beiden Strahlenbüschel, welche $b_{m-2}t_1$ und $b_{m-2}t_2^{\beta}$ beschreiben; folglich haben auch die Strahlenbüschel $b_{m-2}t_2^{\alpha}$ und $b_{m-2}t_2^{\beta}$ in jener Tangente einen Doppelstrahl, welcher die Gerade G in einem Punkte μ trifft. Dieser Punkt μ ist nun der zweite Doppelpunkt,

welchen die beiden Reihen

$$K_2,\ K_2^1,\ \dots\ K_2^n \quad \text{und} \quad L_2,\ L_2^1,\ \dots\ L_2^n$$

haben.

Construirt man nun den dem Doppelpunkte u_2 correspondirenden Punkt der Reihe $g_1,\ g_1^1,\ g_1^2,\ \dots\ g_1^n$, so ist dieser natürlich der Punkt u_1.

Damit wären also die beiden Punkte u_1 und u_2 und folglich auch die Tangenten der Curven U_1 und U_2 am Punkte b_{m-2} bestimmt.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, den vorhin aufgestellten Hülfssatz zu beweisen. Dies geschieht aber auf folgende Weise:

Seien $p_{n-1}t_1,\ p_{n-1}t_2,\ p_{n-1}t_3$ die Tangenten der Curven $R_1,\ R_2,\ R_3$ am Punkte p_{n-1}. Diese Tangenten schneiden auf irgend einer Geraden L von einem fixen Punkte O an gerechnet drei Stücke ab, die wir beziehungsweise $d_1,\ d_2,\ d_3$ nennen wollen.

Wird die Tangente $p_{n-2}t_2$ beliebig angenommen, so ist die Curve R_2 vollkommen bestimmt; es ist dann aber auch die Curve R_3, welche durch die Durchschnittspunkte von R_1 und R_2 geht, und damit auch das Stück d_3, vollkommen und unzweideutig bestimmt.

Das Abhängigkeits-Verhältnifs der Stücke d_2 und d_3 zu einander kann also im Allgemeinen nur durch eine Gleichung folgender Form characterisirt sein:

$$f(d_2) + d_3 f_1(d_2) = 0,$$

wo f und f_1 rationale ganze Functionen von d_2 sind.

Läfst man ferner die Tangente $p_{n-1}t_3$ mit der Tangente $p_{n-1}t_1$ zusammenfallen, wird also $d_3 = d_1$, so berühren sich die beiden Curven R_1 und R_3 im Punkte p_{n-1}. Die Curve R_2, welche durch die Durchschnittspunkte von R_1 und R_3 hindurchgeht, wird also in diesem Falle ebenfalls von den Curven R_1 und R_3 im Punkte p_{n-1} berührt; das Stück d_2 ist also unzweideutig bestimmt, es wird nämlich $d_2 = d_1$.

Die Functionen f und f_1 sind also so beschaffen, dafs die Gleichung:

$$f(d_2) + d_1 f_1(d_2) = 0$$

in Bezug auf d_2 linear wird, indem diese Gleichung die einzige Wurzel $d_2 = d_1$ hat. Dies ist aber im Allgemeinen nur möglich, wenn f und f_1 Functionen vom ersten Grade sind, und in diesem Falle folgt aus der Gleichung:

$$f(d_2) + d_3 f_1(d_2) = 0$$

unmittelbar die Richtigkeit des aufgestellten Hülfssatzes.



Anwendung der allgemeinen Methode auf Curven dritten und vierten Grades.

I. Construction von Curven dritter Ordnung, welche durch 9 Punkte bestimmt sind.

Die gegebenen 9 Punkte seien: a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, b_1, b_2, b_3. Man nehme a_0 als Centrum des Strahlenbüschels P und b_1, b_2, b_3 als bekannte Punkte der Basis der Kegelschnittschaar S.

Durch die 4 Punkte a_1, b_1, b_2, b_3 lege man eine Schaar von Kegelschnitten: $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1^1$, $\mathfrak{A}_1^2$, ... $\mathfrak{A}_1^n$, welche am Punkte b_1 von den beliebig angenommenen Geraden b_1t_1, $b_1t_1^1$, $b_1t_1^2$, ... $b_1t_1^n$ berührt werden.

Seien ferner $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_2''$ drei durch die Punkte a_2, b_1, b_2, b_3 gehende und am Punkte b_1 von den beliebig angenommenen Geraden b_1t_2, b_1t_2', b_1t_2'' berührte Kegelschnitte.

Man construire noch die Kegelschnitte:

$$B[a_3, a_4, a_5], \quad B'[a_3, a_4, a_5], \quad B''[a_3, a_4, a_5],$$

wo B, B', B'' die Durchschnittspunkte beziehungsweise der Kegelschnitte $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2''$ bezeichnen.

Mittelst der drei Tangenten b_1t_2, b_1t_2', b_1t_2'' und der ihnen zugehörigen anharmonischen Verhältnisse:

$$B[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B'[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B''[a_1, a_2, a_3, a_4]$$

construire man jene Tangente $b_1t_2^\alpha$, deren zugehöriges anharmonisches Verhältnifs $B^\alpha[a_1, a_2, a_3, a_4]$ gleich ist jenem des Strahlenbüschels $a_0[a_1, a_2, a_3, a_4]$, auf folgende Weise:

> Durch den Punkt a_1 lege man drei Strahlen $a_1\mathfrak{a}$, $a_1\mathfrak{a}'$, $a_1\mathfrak{a}''$ der Art, dafs die drei anharmonischen Verhältnisse:
>
> $$a_1[\mathfrak{a}, a_2, a_3, a_4], \quad a_1[\mathfrak{a}', a_2, a_3, a_4], \quad a_1[\mathfrak{a}'', a_2, a_3, a_4]$$
>
> beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen:
>
> $$B[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B'[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B''[a_1, a_2, a_3, a_4].$$
>
> Die drei Strahlen $a_1\mathfrak{a}$, $a_1\mathfrak{a}'$, $a_1\mathfrak{a}''$ treffen die drei Tangenten b_1t_2, b_1t_2', b_1t_2'' beziehungsweise in Punkten e, e', e'', welche mit b_1 und a_1 einen Kegelschnitt Q bestimmen. Die fünf Punkte a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 bestimmen einen zweiten Kegelschnitt C. Die Tangente am Punkte a_1 des Kegelschnittes C trifft den Kegelschnitt Q in einem Punkte c. Verbindet man b_1 mit c, so hat man die verlangte Tangente $b_1t_2^\alpha$.

Ganz auf dieselbe Weise kann man mittelst der drei Tangenten $b_1 t_2$, $b_1 t_2'$, $b_1 t_2''$ und der zugehörigen anharmonischen Verhältnisse:

$$B[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad B'[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad B''[a_1, a_2, a_3, a_5]$$

immer jene Tangente $b_1 t_2^\beta$ bestimmen, deren zugehöriges anharmonisches Verhältnifs $B^\beta[a_1, a_2, a_3, a_5]$ gleich ist jenem des Strahlenbüschels $a_0[a_1, a_2, a_3, a_5]$.

Man ziehe nun eine beliebige Gerade G, welche von den Tangenten $b_1 t_2^\alpha$ und $b_1 t_2^\beta$ in den Punkten K und L, und von den Tangenten

$$b_1 t_1, \quad b_1 t_1^1, \quad \ldots \quad b_1 t_1^n$$

in den Punkten g, g^1, g^2, ... g^n getroffen wird.

Seien nun K^1, K^2, ... K^n und L^1, L^2, ... L^n jene Punkte auf G, welche beziehungsweise zu den Punkten g^1, g^2, ... g^n in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte K und L zum Punkte g.

Die drei Punktreihen

$$g, g^1, \ldots g^n; \quad K, K^1, \ldots K^n; \quad L, L^1, \ldots L^n$$

sind unter einander projectivisch.

Die Tangente am Punkte b_1 des von den fünf Punkten a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 bestimmten Kegelschnittes trifft nun die Gerade G in einem Punkte μ, welcher ein Doppelpunkt der beiden Reihen K, K^1, ... K^n und L, L^1, ... L^n ist. Sei λ der zweite von μ verschiedene Doppelpunkt dieser beiden Reihen.

Man construire nun den dem Doppelpunkte λ correspondirenden Punkt g^λ der Reihe g, g^1, ... g^n.

Die Geraden $b_1 g^\lambda$ und $b_1 \lambda$ sind nun die Tangenten am Punkte b_1 der beiden der Schaar S angehörigen und respective den Strahlen $a_0 a_1$ und $a_0 a_2$ correspondirenden Kegelschnitte. Hiermit ist aber die Aufgabe gelöst.

II. Construction von Curven vierter Ordnung, welche durch 14 Punkte bestimmt sind.

Die gegebenen 14 Punkte seien:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6.$$

Man nehme a_0 als Centrum des Strahlenbüschels P und die Punkte b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 als bekannten Theil der Basis der Schaar S von Curven dritter Ordnung.

Durch die sieben Punkte a_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 lege man eine Schaar von Curven dritter Ordnung:

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_1^1, \quad \ldots \quad \mathfrak{A}_1^n,$$



welche sämmtlich am Punkte b_1 von irgend einer Geraden $b_1 T_1$, am Punkte b_2 aber von den beliebig angenommenen Geraden $b_2 t_1$, $b_2 t_1^1$, $b_2 t_1^2$, ... $b_2 t_1^n$ berührt werden.

Seien ferner $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_2''$ drei durch die Punkte a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 gehende Curven dritter Ordnung, welche sämmtlich am Punkte b_1 von irgend einer Geraden $b_1 T_2$, am Punkte b_2 aber beziehungsweise von den beliebig angenommenen Geraden $b_2 t_2$, $b_2 t_2'$, $b_2 t_2''$ berührt werden.

Man bestimme noch die Curven dritter Ordnung:

$$B[a_3, a_4, a_5], \quad B'[a_3, a_4, a_5], \quad B''[a_3, a_4, a_5],$$

wo B, B', B'' die Durchschnittspunkte beziehungsweise der Curven $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2''$ bezeichnen. Mittelst der bekannten anharmonischen Verhältnisse:

$$B[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B'[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B''[a_1, a_2, a_3, a_4]$$

und der ihnen zugehörigen Tangenten

$$b_2 t_2, \quad b_2 t_2', \quad b_2 t_2''$$

kann nun immer jene Tangente $b_2 t_2^\alpha$ construirt werden, deren zugehöriges anharmonisches Verhältnifs $B^\alpha[a_1, a_2, a_3, a_4]$ gleich ist jenem des Strahlenbüschels $a_0[a_1, a_2, a_3, a_4]$. Diese Construction geschieht natürlich ganz auf dieselbe Weise, wie die ähnliche im vorhergehenden Beispiele. Ebenso bestimme man mittelst der drei Tangenten $b_2 t_2$, $b_2 t_2'$, $b_2 t_2''$ und der ihnen zugehörigen anharmonischen Verhältnisse

$$B[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad B'[a_1, a_2, a_3, a_5], \quad B''[a_1, a_2, a_3, a_5]$$

jene Tangente $b_2 t_2^\beta$, deren zugehöriges anharmonisches Verhältnifs $B^\beta[a_1, a_2, a_3, a_5]$ gleich ist jenem des Strahlenbüschels $a_0[a_1, a_2, a_3, a_5]$.

Man ziehe nun eine beliebige Gerade G, welche von den Tangenten $b_2 t_2^\alpha$ und $b_2 t_2^\beta$ in den Punkten K und L, und von den Tangenten

$$b_2 t_1, \quad b_2 t_1', \quad \ldots \quad b_2 t_1^n$$

in den Punkten g, g', g'', ... g^n getroffen wird.

Seien K', K'', ... K^n und L', L'', ... L^n jene Punkte auf G, welche zu den Punkten g', g'', ... g^n respective in derselben Beziehung stehen, wie die Punkte K und L zum Punkte g.

Die drei Punktreihen

$$g, g', g'', \ldots g^n; \quad K, K', K'', \ldots K^n; \quad L, L', L'', \ldots L^n$$

sind unter einander projectivisch.



Unter der Schaar der Curven $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1^1$, ... $\mathfrak{A}^n$ giebt es nur eine, welche zugleich durch a_2 geht, und ihre Tangente in b_2 trifft die Gerade G in einem Punkte μ, welcher ein Doppelpunkt der beiden projectivischen Reihen:

$$K, K', \dots K^n \quad \text{und} \quad L, L', \dots L^n$$

ist. Sei nun λ der zweite von μ verschiedene Doppelpunkt dieser beiden Reihen.

Man construire den diesem Doppelpunkte λ correspondirenden Punkt g^λ der Reihe: $g, g', \dots g^n$.

Seien nun V_1 und V_2 die beiden beziehungsweise durch die Punkte a_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 und a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 gehenden, am Punkte b_1 von den Geraden b_1T_1 und b_1T_2, am Punkte b_2 aber von den Geraden b_2g^λ und $b_2\lambda$ berührte Curven dritter Ordnung.

Diese beiden Curven haben vermöge ihrer Entstehung die Eigenschaft, dafs, wenn B den Inbegriff der Durchschnittspunkte von V_1 und V_2 bezeichnet, die beiden anharmonischen Verhältnisse:

$$B[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B[a_1, a_2, a_3, a_5]$$

beziehungsweise gleich sind den anharmonischen Verhältnissen der Strahlenbüschel:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_5].$$

Seien jetzt V_1' und V_2' zwei beziehungsweise durch die Punkte a_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 und a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 gehende und am Punkte b_1 von den Geraden b_1T_1 und b_1T_2 berührte Curven dritter Ordnung der Art, dafs, wenn B' den Inbegriff der Durchschnittspunkte von V_1' und V_2' bezeichnet, die anharmonischen Verhältnisse:

$$B'[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B'[a_1, a_2, a_3, a_6]$$

beziehungsweise gleich werden den anharmonischen Verhältnissen der Strahlenbüschel:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_6].$$

Die Tangenten der Curven V_1' und V_2' am Punkte b_2 können ganz auf dieselbe Weise construirt werden, wie jene der Curven V_1 und V_2 an diesem Punkte.

Seien endlich V_1'' und V_2'' zwei beziehungsweise durch die Punkte a_1, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 und a_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 gehende, am Punkte b_1 von den Geraden b_1T_1 und b_1T_2 berührte Curven dritter Ordnung der Art, dafs, wenn B'' den Inbegriff der Durchschnittspunkte von V_1'' und V_2''

bezeichnet, die anharmonischen Verhältnisse:

$$B''[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad B''[a_1, a_2, a_3, a_7]$$

beziehungsweise gleich sind den anharmonischen Verhältnissen der Strahlenbüschel:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, a_4], \quad a_0[a_1, a_2, a_3, a_7].$$

Man construire wieder die Tangenten der Curven V_1'' und V_2'' am Punkte b_2.

Man ziehe nun zwei beliebige Gerade L_1 und L_2. Sei l_1 der Durchschnittspunkt der Geraden L_1 und $b_1 T_1$, und l_2 jener von L_2 und $b_1 T_2$. Die Verbindungslinie $l_1 l_2$ bezeichne man kurz mit s.

Die Tangenten der Curven V_1, V_1', V_1'' am Punkte b_2 treffen die Gerade L_1 beziehungsweise in den Punkten m_1, m_1', m_1''; ebenso schneiden die Tangenten der Curven V_2, V_2', V_2'' am Punkte b_2 die Gerade L_2 beziehungsweise in den Punkten m_2, m_2', m_2''. Die Verbindungslinien $m_1 m_2$, $m_1' m_2'$, $m_1'' m_2''$ bezeichne man kurz mit σ, σ', σ''. Man lasse nun die drei Curvenpaare V_1, V_2; V_1', V_2'; V_1'', V_2'' dadurch variiren, dafs die Verbindungslinie s stets durch einen beliebig angenommenen festen Punkt f geht. Es werden sich dann auch die Verbindungslinien σ, σ', σ'' um feste Punkte drehen, welche wir beziehungsweise g, g_1, g_{11} nennen wollen.

Man erhält so vier unter einander *projectivische* Strahlenbüschel, welche wir kurz mit f, g, g_1, g_{11} bezeichnen.

Man construire nun jene beiden Strahlen s_λ und s_μ des Büschels f, von welchen der erste dem Strahle gg_1 des Büschels g, der zweite hingegen dem Strahle $g_1 g_{11}$ des Büschels g_1 correspondirt. Man lasse jetzt den Punkt f irgend eine andere Lage f^1 einnehmen. Es werden dann auch die Punkte g, g_1, g_{11} entsprechend andere Lagen g^1, g_1^1, g_{11}^1 einnehmen, und man erhält wieder vier unter einander projectivische Strahlenbüschel: f^1, g^1, g_1^1, g_{11}^1.

Seien s_λ^1 und s_μ^1 wieder jene beiden Strahlen des Büschels f^1, welche beziehungsweise den Strahlen $g^1 g_1^1$ und $g_1^1 g_{11}^1$ der Büschel g^1 und g_1^1 correspondiren. Die beiden Strahlen s_λ und s_λ^1 schneiden sich in einem Punkte O, und die beiden Strahlen s_μ und s_μ^1 in einem Punkte O^1.

Die Verbindungslinie OO^1 trifft die Gerade L_1 in einem Punkte o_1 und die Gerade L_2 in einem Punkte o_2. Die Geraden $b_1 o_1$ und $b_1 o_2$ sind nun die Tangenten am Punkte b_1 der beiden der Schaar S angehörigen und den Strahlen $a_0 a_1$ und $a_0 a_2$ correspondirenden Curven dritter Ordnung. Auf dieselbe Weise können die Tangenten dieser Curven am Punkte b_2 gefunden werden. Diese Curven sind daher vollkommen bestimmt und damit ist die Aufgabe gelöst.

§. II.

Auflösung des Fundamentalproblems, wenn $n = 2$, $n' = m - 2$ ist, für Curven, deren Ordnungszahl $m > 6$ ist.

Die Aufgabe, eine durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte bestimmte Curve m^{ter} Ordnung M mittelst der Durchschnittspunkte der correspondirenden Elemente einer Kegelschnittschaar P und einer Schaar S von Curven $(m-2)^{ter}$ Ordnung zu erzeugen, ist gelöst, sobald man irgend zwei Curven der Schaar S kennt.

Die gegebenen $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte der Curve M seien:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, \ldots b_{\frac{1}{2}[m(m-5)+6]}, c_1, c_2, \ldots c_{4m-7}.$$

Man nehme a_1, a_2, a_3, a_4 als Basis der Kegelschnittschaar P und

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots \quad b_{\frac{1}{2}[m(m-5)+6]}$$

als bekannte Punkte der Basis der Curvenschaar S.

Die beiden beziehungsweise durch die Punkte c_1 und c_2 gehenden Curven C_1 und C_2 der Schaar S sind bestimmt, sobald von jeder dieser Curven noch $2m-5$ Elemente bekannt sind.

Ist nun $2(2m-5) < m(m-5)+6$ und betrachtet man die Tangenten der Curven C_1 und C_2 an den Punkten b_1, b_2, b_3, ... b_{2m-5} als die noch unbekannten zu bestimmenden $4m-10$ Elemente dieser Curven, so können diese Tangenten dadurch bestimmt werden, dafs man die $4m-10$ anharmonischen Verhältnisse:

$$B[c_1, c_2, c_3, c_4], \quad B[c_1, c_2, c_3, c_5], \quad \ldots \quad B[c_1, c_2, c_3, c_{4m-7}]$$

beziehungsweise gleich setzt den anharmonischen Verhältnissen:

$$A[c_1, c_2, c_3, c_4], \quad A[c_1, c_2, c_3, c_5], \quad \ldots \quad A[c_1, c_2, c_3, c_{4m-7}],$$

wo A das System der vier Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 und B den Inbegriff der $(m-2)^2$ Durchschnittspunkte der Curven C_1 und C_2 bezeichnet.

Diese Bestimmung der Tangenten geschieht aber natürlich auf ganz dieselbe Weise, wie jene der Tangenten der Curven A_1 und A_2 bei dem im vorhergehenden Paragraphen behandelten Probleme.

Der ganze Unterschied liegt blofs darin, dafs an die Stelle des Strahlenbüschels:

$$a_0[a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2m-1}]$$

die Kegelschnittschaar:

$$A[c_1, c_2, c_3, \ldots c_{4m-7}]$$

tritt.

Die Aufgabe, eine durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte bestimmte Curve m^{ter} Ordnung mittelst der Durchschnittspunkte der correspondirenden Elemente eines Kegelschnittbüschels und einer Schaar von Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu erzeugen, ist also gelöst für alle Werthe von m, für welche

$$4m-10 < m(m-5)+6,$$

also $m > 6$ ist.

Anmerkung. Was die Curven fünfter und sechster Ordnung betrifft, so ist wohl klar, dafs diese beiden Fälle ebenfalls im Sinne der allgemeinen Methode unter Anwendung derselben Betrachtungsweisen, welche im §. I. stattgefunden haben, behandelt werden können.

§. III.

Geometrische Construction der Durchschnittspunkte einer durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte bestimmten Curve m^{ter} Ordnung und einer gegebenen Geraden.

Seien d_1, d_2, d_3, ... d_m die m Durchschnittspunkte, in welchen die durch $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte bestimmte Curve M eine gegebene Gerade L trifft. Betrachten wir zuerst den Fall, wo m eine zusammengesetzte Zahl rn und $r < n$ ist.

Im Allgemeinen besteht das Problem der geometrischen Construction der Durchschnittspunkte der Curve M und der Geraden L darin, zwei Curven R und N respective vom r^{ten} und n^{ten} Grade zu bestimmen, so dafs die Durchschnittspunkte dieser beiden Curven in einem bestimmten geometrischen Zusammenhange zu den Punkten d_1, d_2, d_3, ... d_m stehen.

Bezüglich der näheren Bestimmung der Curven R und N können noch verschiedene Annahmen gemacht werden. So kann die Curve R ganz willkürlich genommen werden. Wir denken uns nun dieselbe so gewählt, dafs sie mit einem vielfachen Punkte $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung O begabt ist. Ferner wollen wir annehmen, dafs die von O nach den Durchschnittspunkten der Curven R und N gezogenen Strahlen die Gerade L in den Punkten d_1, d_2, ... d_m treffen. Von der Curve R können $\frac{1}{2}n(n+3)-rn$ Punkte willkürlich gewählt werden.

Soll nun die Curve N durch ihre rn Durchschnittspunkte mit R auf die angenommene Weise zur Construction der Punkte d_1, d_2, ... d_m dienen, so darf sich die Curve N natürlich nicht in zwei solche Curven respective r^{ten} und $(n-r)^{\text{ten}}$ Grades zerlegen lassen, dafs die eine dieser Curven mit R

zusammenfällt und die andere durch die $\frac{1}{2}n(n+3)-rn$ willkürlich angenommenen Punkte geht. Damit nun dies nicht eintreffe, so mufs, wie man leicht sieht, stets

$$\tfrac{1}{2}[(n-r)^2+3(n-r)]<\tfrac{1}{2}(n^2+3n-2rn),$$

also $r<3$ sein.

Die Curve R mufs also jederzeit ein Kegelschnitt U sein und wir haben zuerst den Fall zu betrachten, wo $m=2n$, also m eine gerade Zahl ist.

Was nun die nähere Bestimmung der Curve N, von welcher $\frac{1}{2}(n^2+3n)-2n$ Punkte willkürlich genommen werden können, betrifft, so ist es das einfachste, dieselbe dadurch näher zu bestimmen, dafs sie mit einem vielfachen Punkte $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung begabt ist, indem ein $(n-1)$facher Punkt einer Curve n^{ten} Grades eben für $\frac{1}{2}(n^2+3n)-2n$ Bestimmungsstücke zählt.

Unsere Aufgabe ist jetzt näher bestimmt und lautet:

Eine mit einem $(n-1)$fachen Punkte begabte Curve n^{ter} Ordnung N zu bestimmen, welche einen beliebig angenommenen Kegelschnitt U in $2n$ solchen Punkten trifft, dafs die von irgend einem Punkte O dieses Kegelschnittes nach diesen $2n$ Punkten gezogenen Strahlen die Gerade L in den Punkten $d_1, d_2, \ldots d_m$ treffen.

Beliebige Punkte der Curve N werden nun auf folgende Weise construirt:

Seien $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, \ldots b_{\frac{1}{2}[m(m-5)+6]}, c_1, c_2, \ldots c_{4m-7}$ die gegebenen $\frac{1}{2}m(m+3)$ Punkte der Curve M.

Man nehme a_1, a_2, a_3, a_4 als Basis einer Kegelschnittschaar P und $b_1, b_2, \ldots b_{\frac{1}{2}[m(m-5)+6]}$ als bekannte Punkte der Basis einer Schaar S von Curven $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch ihre Durchschnitte mit den correspondirenden Curven der Schaar P die Curve M erzeugen. Die der Schaar P angehörigen und durch die Punkte $c_1, c_2, \ldots$ gehenden Kegelschnitte $Z_1, Z_2, \ldots$ schneiden auf der Geraden L Segmente ab, welche in Involution stehen. Die Schenkel der Winkel, unter welchen man vom Punkte O des Kegelschnittes U aus diese Segmente sieht, schneiden in diesem Kegelschnitte Sehnen ab, welche alle in einem Punkte Q zusammenlaufen und den Kegelschnitten $Z_1, Z_2, \ldots$ anharmonisch correspondiren. Diese im Punkte Q zusammenlaufenden Sehnen seien: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$

Man bestimme jetzt die durch den Punkt c_1 gehende Curve C_1 der Schaar S. Die Curve C_1 lasse man wieder mittelst der Durchschnitte der correspondirenden Elemente zweier projectivischen Schaaren P' und S' re-

spective vom zweiten und $(m-4)^{\text{ten}}$ Grade entstehen; dabei nehme man den Punkt c_1 wieder zu jenen, welche den variablen Theil der Schaaren P' und S' bilden. Man bestimme wieder die durch den Punkt c_1 gehende Curve C_1' der Schaar S'. Mit der Curve C_1' mache man dasselbe, was mit C_1 geschehen ist. Man bilde nämlich zwei projectivische Schaaren P'' und S'' respective vom zweiten und $(m-6)^{\text{ten}}$ Grade, welche die Curve C_1' erzeugen, und nehme den Punkt c_1 wieder zu jenen Punkten, welche den variablen Theil der Schaaren P'' und S'' bilden. Man bestimme wieder die durch den Punkt c_1 gehende Curve C_1'' der Schaar S''.

Die Curve C_1'' behandle man wieder so, wie C_1' und fahre so fort, bis man auf eine Curve $C_1^{\frac{1}{2}(m-4)}$ kommt, welche, da m gerade ist, von der Ordnung $m-(m-2)$, also ein Kegelschnitt ist. Dieser durch den Punkt c_1 gehende Kegelschnitt schneidet auf L ein Segment ab.

Die Schenkel des Winkels, unter welchem man vom Punkte O dieses Segment sieht, schneiden auf U eine Sehne ab, welche s_1 heifsen soll.

Die Sehnen σ_1 und s_1 schneiden sich in einem Punkte D_1.

Wiederholt man die *nämlichen* Prozesse nur mit dem *einzigen* Unterschiede, dafs man an die Stelle des Punktes c_1 nacheinander die Punkte $c_2, c_3, \ldots$ treten läfst, so erhält man eine Schaar F von Kegelschnitten $C_2^{\frac{1}{2}(m-4)}, C_3^{\frac{1}{2}(m-4)}, \ldots$, welche durch die Punkte $c_2, c_3, \ldots$ gehen, und ihnen entsprechend eine Reihe von Sehnen $s_2, s_3, \ldots$, welche von den correspondirenden Sehnen $\sigma_2, \sigma_3, \ldots$ in den Punkten $D_2, D_3, \ldots$ getroffen werden.

Ich behaupte nun, dafs die Punkte $D_1, D_2, \ldots$ auf der Curve N liegen und dafs Q ein $(n-1)$facher Punkt dieser Curve sei.

Sei nämlich d_μ ein auf L liegender Punkt der Curve M; Z_μ und $C_\mu^{\frac{1}{2}(m-4)}$ seien die beiden respective den Schaaren P und F angehörigen und durch den Punkt d_μ gehenden Kegelschnitte und s_μ und σ_μ die ihnen entsprechenden Sehnen auf U.

Da nun der gemeinschaftliche Punkt d_μ der Kegelschnitte Z_μ und $C_\mu^{\frac{1}{2}(m-4)}$ auf L liegt, so müssen sich nothwendiger Weise die Sehnen s_μ und σ_μ auf dem Kegelschnitte U schneiden. So viel Punkte also die Curve M mit L gemein hat, in soviel Punkten trifft die Curve, auf welcher die Punkte $D_1, D_2, \ldots$ liegen, den Kegelschnitt U. Diese Curve ist also höchstens vom n^{ten} Grade und, weil jede der durch Q gehenden Sehnen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ nur

in einem einzigen Punkte von dieser Curve getroffen wird, so ist Q ein $(n-1)$facher Punkt derselben. Die Punkte D_1, D_2, ... liegen also auf N.

Da Q ein $(n-1)$facher Punkt der Curve N ist, so braucht man blofs $2n = m$ Punkte D_1, D_2, ... D_{2n} zu construiren, indem mittelst dieser $2n$ Punkte beliebig viele andere direct gefunden werden können. (*Jonquières, essai etc. deuxième section,* §. XII.)

Ist der Grad m der Curve M ungerade, nämlich $m = 2n-1$, so bleibt der Anfang und Verlauf des ganzen Vorganges derselbe, nur mit dem Unterschiede, dafs am Ende an die Stelle der Kegelschnitte $C_1^{\frac{1}{2}(m-4)}$, $C_2^{\frac{1}{2}(m-4)}$, ... gerade Linien $C_1^{\frac{1}{2}(m-1)}$, $C_2^{\frac{1}{2}(m-1)}$, ... treten, welche die Gerade L beziehungsweise in den Punkten l_1, l_2, ... treffen. Verbindet man diese Punkte mit einem beliebigen Punkte V des Kegelschnittes U, so schneiden die Verbindungslinien Vl_1, Vl_2, ... die correspondirenden Sehnen σ_1, σ_2, ... in den Punkten D_1, D_2, ..., welche einer durch Q und V gehenden Curve N n^{ter} Ordnung angehören, welche Q zu einem $(n-1)$fachen Punkte hat und den Kegelschnitt U aufser V in $2n-1$ solchen Punkten trifft, dafs die von O nach diesen Punkten gezogenen Strahlen die Gerade L in den Punkten d_1, d_2, ... d_m schneiden. Diese Curve N löst also die Aufgabe für den Fall, wenn $m = 2n-1$ ist.

Beispiel. Eine Curve vierten Grades M ist durch 14 Punkte bestimmt und eine Gerade L gegeben; man soll die Durchschnittspunkte der Curve M und der Geraden L construiren.

Die gegebenen 14 Punkte seien:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5,\ c_6,\ c_7,\ c_8,\ c_9.$$

Man bilde zwei projectivische Kegelschnittschaaren P und S, welche durch die Durchschnitte ihrer correspondirenden Elemente die Curve M erzeugen; dabei nehme man a_1, a_2, a_3, a_4 als Basis der Schaar P und b_1 als bekannten Punkt der Basis der Schaar S. Man denke sich irgend einen Kegelschnitt U und auf demselben einen beliebigen Punkt O construirt.

Die Kegelschnitte der Schaar P schneiden auf L Segmente ab, welche in Involution stehen. Die Schenkel der Winkel, unter welchen man von O aus diese Segmente sieht, schneiden in U Sehnen ab, welche alle in einem Punkte Q zusammenlaufen. Diese in Q zusammenlaufenden Sehnen seien: σ_1, σ_2, ...

Ebenso schneiden die Kegelschnitte der Schaar S auf L Segmente ab, die in Involution stehen, und die Schenkel der Winkel, unter welchen man von O_{ι} aus diese Segmente sieht, schneiden auf U Sehnen ab, welche ebenfalls alle in einem Punkte R zusammenlaufen. Diese Sehnen seien: s_1, s_2, ...

Die beiden Strahlenbüschel, welche von den Sehnen σ_1, σ_2, ... und s_1, s_2, ... beschrieben werden, sind natürlich projectivisch und die Durchschnitte ihrer correspondirenden Elemente erzeugen einen Kegelschnitt N, welcher den Kegelschnitt U in vier solchen Punkten trifft, dafs die von O aus nach diesen vier Punkten gezogenen Strahlen die Gerade L in jenen Punkten schneiden, welche die Curve M mit L gemein hat.

Feldkirch in Vorarlberg, am 10 December 1859.

Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right].$$

(Von Herrn *L. Fuchs.*)

1.

Um die Nabelpunkte einer Fläche zu finden, hat man bekanntlich die Gleichung der gegebenen Fläche mit zwei anderen zu verbinden, die man erhält, wenn man in der von *Monge* angegebenen Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$[(1+q^2)s-pqt]y'^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]y'-[(1+p^2)s-pqr] = 0$$

aufser dem Coefficienten von y' noch einen der beiden andern der Null gleichsetzt. Man erhält die partiellen Differentialgleichungen:

$$(1.)\qquad (1+q^2)r-(1+p^2)t = 0,$$

$$(1^a.)\qquad (1+q^2)s-pqt = 0$$

oder

$$(1+p^2)s-pqr = 0.$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs sich auf den Flächen, die einer dieser Gleichungen genügen, wenn sie überhaupt Nabelpunkte besitzen, im Allgemeinen Nabellinien befinden.

Während nun die Gleichung (1^a.) leicht integrirt werden kann, verursacht die Integration der Gleichung (1.) gröfsere Schwierigkeiten. — Bevor ich aber zu dem eigentlichen Gegenstande dieser Arbeit, nämlich zu dieser Integration, übergehe, kann ich nicht unterlassen, in Kürze zu zeigen, dafs man beide Reihen der Krümmungslinien der durch die Gleichung (1.) dargestellten Flächenfamilie finden kann, ohne dafs es nöthig ist, das Integral dieser Gleichung vorher zu kennen.

Denn bildet man nach der *Monge*schen Methode die Gleichungen der Characteristiken dieser Flächen, so erhält man:

$$(2.)\qquad \begin{cases}(1+q^2)\,dp\,dy-(1+p^2)\,dq\,dx = 0,\\ (1+q^2)\,dy^2\quad-(1+p^2)\,dx^2 = 0.\end{cases}$$

Durch Combination derselben folgt für die eine und die andere Characteristik

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}+\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}=0, \qquad \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}-\frac{dq}{\sqrt{1+q^2}}=0,$$

oder durch Integration:

$$(3.) \quad (p+\sqrt{1+p^2})(q+\sqrt{1+q^2})=c,$$

$$(4.) \quad \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}}=c_1,$$

wo c und c_1 Constanten sind. Andererseits geht die am Anfange erwähnte Differentialgleichung der Krümmungslinien für die Flächenfamilie der Gleichung (1.), wie man leicht findet, über in die folgende:

$$(5.) \quad (1+q^2)\,dy^2-(1+p^2)\,dx^2=0.$$

Da nun diese Gleichung mit der zweiten Gleichung (2.) identisch ist, und da aus der Combination eben dieser Gleichung mit der Gleichung (1.) die erste Gleichung (2.) erhalten wird, so ergiebt sich, dafs die letztere Gleichung ebenfalls für die Krümmungslinien gelte. Man ersieht daraus, dafs die Integrale der Gleichungen (2.), nämlich die Gleichungen (3.) und (4.), der einen oder der andern Reihe von Krümmungslinien angehören. Ist nun die Gleichung einer der Familie (1.) angehörigen Fläche gegeben, so hat man nur dieselbe nebst den beiden durch einmalige Differentiation nach x und y daraus abgeleiteten mit den Gleichungen (3.) und (4.) zu verbinden, um durch Elimination beide Reihen von Krümmungslinien zu erhalten. — Wir gehen nunmehr zur Integration der Differentialgleichung (1.) über.

2.

Zunächst verwandeln wir die gegebene Differentialgleichung in eine solche, in welcher die ersten Ableitungen nicht vorkommen, mit Hülfe einer von *Legendre* (Mémoires de l'académie des sciences de Paris ann. 1787) angegebenen Transformation. Dieselbe besteht darin, dafs man statt der Variabeln x, y, z drei neue p, q, ω einführt, welche mit ihnen durch folgende Gleichungen verbunden sind:

$$(6.) \quad p=\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \omega=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z$$

und umgekehrt:

$$(7.) \quad x=\frac{\partial \omega}{\partial p}, \qquad y=\frac{\partial \omega}{\partial q}, \qquad z=p\frac{\partial \omega}{\partial p}+q\frac{\partial \omega}{\partial q}-\omega.$$

Man hat alsdann

$$(8.)\quad r = \frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}}{\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}\right)^2}, \qquad s = -\frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}}{\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}\right)^2},$$

$$t = \frac{\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}}{\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}-\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}\right)^2}.$$

Geht nun eine Differentialgleichung

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

durch diese Substitution über in:

$$\varphi\left(p, q, \omega, \frac{\partial\omega}{\partial p}, \frac{\partial\omega}{\partial q}, \frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial p\,\partial q}, \frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}\right) = 0,$$

und gelingt es, die letztere so zu integriren, dafs man hat:

$$\omega = F[p, q, \psi(p, q), \chi(p, q)],$$

(worin ψ und χ willkürliche Functionen sind), so erhält man durch blofse Differentiation das allgemeine Integral der ersteren vermöge der Gleichungen (7.) so dargestellt, dafs x, y, z als Functionen zweier Variabeln p, q auftreten, und in ihrem Ausdrucke eine hinreichende Anzahl willkürlicher Functionen enthalten ist. Es ist zu bemerken, dafs, wenn x, y, z die Coordinaten einer Fläche bedeuten, ω, p, q die Coordinaten der von *Monge* so genannten reciproken Fläche sind. (Vergl. *Chasles*, aperçu historique, Note XXX.)

Unsere Gleichung (1.) geht durch die *Legendre*sche Transformation in die folgende über:

$$(9.)\quad (1+p^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} - (1+q^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2} = 0,$$

mit deren Integration wir uns nun zu beschäftigen haben.

3.

Wir führen als Coordinaten diejenigen Curven der reciproken Flächen (9.) ein, welche den Krümmungslinien der Flächen (1.) entsprechen. (Siehe die Gleichungen (3.), (4.) und (6.).) Wir setzen also:

$$(10.)\quad \frac{p+\sqrt{1+p^2}}{q+\sqrt{1+q^2}} = u, \qquad (p+\sqrt{1+p^2})(q+\sqrt{1+q^2}) = u_1,$$

wo u und u_1 die beiden neuen Variabeln sind. Daraus folgt

$$(11.)\qquad p+\sqrt{1+p^2}=\sqrt{uu_1},\qquad q+\sqrt{1+q^2}=\sqrt{\frac{u_1}{u}}.$$

Durch Differentiation erhält man

$$(12.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{2}\left\{\dfrac{u_1\,du+u\,du_1}{uu_1}\right\}, \\ \dfrac{dq}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{1}{2}\left\{\dfrac{-u_1\,du+u\,du_1}{uu_1}\right\}. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial p}{\partial u}=a,\qquad \frac{\partial p}{\partial u_1}=a_1,\qquad \frac{\partial q}{\partial u}=b,\qquad \frac{\partial q}{\partial u_1}=b_1,$$

so erhält man aus (12.)

$$(13.)\qquad \begin{cases} a=\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\,\dfrac{1}{u}, & b=-\frac{1}{2}\sqrt{1+q^2}\,\dfrac{1}{u}, \\ a_1=\frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\,\dfrac{1}{u_1}, & b_1=\ \ \frac{1}{2}\sqrt{1+q^2}\,\dfrac{1}{u_1}. \end{cases}$$

Um die transformirte Differentialgleichung zu erhalten, kann man z. B die von *Jacobi* (dieses Journal Band 36, über die Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$) angegebene Reductionsmethode anwenden, wonach, wenn F eine Function von $x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$ bedeutet und

$$\triangle = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u_1}-\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u}$$

gesetzt wird,

$$(14.)\qquad \triangle\left\{\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial x}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial y}}\right\}$$

$$=\triangle\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial u}\triangle\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial u}}\right)-\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\triangle\frac{\partial F}{\partial\frac{\partial z}{\partial u_1}}\right)$$

ist. In unserem Falle mufs man

$$(15.)\qquad F=\frac{1}{2}\left\{\frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial p}\right)^2}{1+q^2}-\frac{\left(\frac{\partial\omega}{\partial q}\right)^2}{1+p^2}\right\}$$

setzen. Durch Transformation ergiebt sich hieraus mit Rücksicht auf (13.)

$$(16.)\qquad \triangle^2 F = e\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial\omega}{\partial u_1},$$

worin

$$e = \left\{ \frac{aa_1}{1+p^2} - \frac{bb_1}{1+q^2} \right\}.$$

Aus (15.) und (16.) folgt nun, dafs in unserem Falle (14.) die Differentialgleichung liefert:

$$(17.)\qquad \frac{\partial \left\{ K \frac{\partial \omega}{\partial u_1} \right\}}{\partial u} + \frac{\partial \left\{ K \frac{\partial \omega}{\partial u} \right\}}{\partial u_1} = 0,$$

worin

$$(18.)\qquad K = \frac{uu_1}{(u+u_1)(uu_1+1)}.$$

Es ist aber

$$K = \frac{1}{u + \frac{1}{u} + u_1 + \frac{1}{u_1}},$$

oder wenn wir zur Abkürzung

$$(19.)\qquad \begin{cases} u + \frac{1}{u} = \alpha, \\ u_1 + \frac{1}{u_1} = \beta \end{cases}$$

setzen,

$$(20.)\qquad K = \frac{1}{\alpha+\beta},$$

mithin geht die Gleichung (17.) über in

$$\frac{\partial \left\{ \frac{\frac{\partial \omega}{\partial u_1}}{\alpha+\beta} \right\}}{\partial u} + \frac{\partial \left\{ \frac{\frac{\partial \omega}{\partial u}}{\alpha+\beta} \right\}}{\partial u_1} = 0$$

oder in

$$(20.)\qquad 2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial u_1} - \frac{d\alpha}{du}\frac{\partial \omega}{\partial u_1} - \frac{d\beta}{du_1}\frac{\partial \omega}{\partial u} = 0.$$

Ich werde jetzt zeigen, dafs man die Differentialgleichung (20.) sogar unter der allgemeineren Voraussetzung integriren kann, dafs α und β ***beliebige*** Functionen respective von u und u_1 sind.

4.

Führt man nämlich α und β als Variabeln ein, so hat man:

$$\frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{\partial \omega}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{du}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial u_1} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}\frac{d\beta}{du_1}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial u_1} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\frac{d\alpha}{du}\frac{d\beta}{du_1}.$$

Daher geht die Gleichung (20.) über in:

$$(21.)\qquad 2(\alpha+\beta)\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\frac{\partial\omega}{\partial\beta}=0.$$

Wendet man nun die Substitution

$$(22.)\qquad \begin{cases}\alpha+\beta=t,\\ \alpha-\beta=v\end{cases}$$

an, so hat man

$$(22^a.)\quad \begin{cases}\dfrac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}+\frac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta}, & \dfrac{\partial\omega}{\partial v}=\frac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\alpha}-\frac{1}{2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\beta},\\[2ex] \dfrac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=\frac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}+\frac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}, & \dfrac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{2}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\beta^2}.\end{cases}$$

Durch Subtraction der beiden letzteren Gleichungen von einander erhält man

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta},$$

oder vermöge der ersten Gleichung (22^a.) und der Gleichung (21.)

$$(23.)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{1}{t}\frac{\partial\omega}{\partial t}.$$

Diese Gleichung aber ist ein specieller Fall derjenigen, die ***Poisson*** (Journal de l'école polytechnique, cah. 19) behandelt, nämlich der folgenden:

$$(24.)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2}=a^2\Big(\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}+\frac{l}{t}\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{g}{t^2}\,\omega\Big),$$

worin l, g Constanten sind. ***Euler*** und in der erwähnten Abhandlung ***Poisson*** haben im Allgemeinen das Integral derselben oder vielmehr der durch die Substitution

$$(25.)\qquad \omega=V.t^{-\frac{1}{2}l}$$

in die folgende verwandelten:

$$(26.)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=a^2\Big(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\frac{mV}{t^2}\Big)$$

in unendlichen Reihen gegeben.

Die Fälle, in welchen ***Poisson*** dieselben summirt, hängen wesentlich von den Wurzeln der Gleichung:

$$(27.)\qquad k(k-1)-m=0$$

ab. Ist insbesondere eine Wurzel derselben negativ, wo alsdann die andere positiv sein mufs, und zwar habe die positive die Form $i+\frac{1}{2}$, wo i eine positive ganze Zahl bedeutet, so werden die Glieder der Reihen vom $2i^{\text{ten}}$ ab unendlich — aber gerade auch in diesem Falle läfst sich, wie ***Poisson***

gezeigt hat, das Integral in endlicher Form darstellen. Es ist nämlich:

$$(28.)\qquad V = t^{i+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \varphi(t\cos\lambda + av)\sin^{2i}\lambda\, d\lambda +$$

$$t^{-i+\frac{1}{2}}\left[\psi(t+av) + A'_1 t\frac{\partial\psi(t+av)}{\partial t} + A'_2 t^2\frac{\partial^2\psi(t+av)}{\partial t^2} + \cdots + A'_{2i-1}t^{2i-1}\frac{\partial^{2i-1}\psi(t+av)}{\partial t^{2i-1}}\right] -$$

$$ct^{i+\frac{1}{2}}\log t\int_0^\pi \psi'(t\cos\lambda+av)\sin^{2i}\lambda\, d\lambda + 2ct^{i+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \psi'(t\cos\lambda+av)\left[\frac{1}{2i}-(q'+c')\sin^{2i}\lambda\right]d\lambda,$$

worin

$$(29.)\quad \begin{cases} A'_n = \dfrac{(2i-1)(2i-3)\dots(2i-2n+1)}{(2i-1)(2i-2)\dots(2i-n)}\,\dfrac{(-1)^n}{1.2\dots n}, \quad q = \displaystyle\int_\pi^\lambda \sin^{2i}\lambda\, d\lambda, \\ q' = 2i\displaystyle\int \frac{q}{\sin^{2i}\lambda}\,d\lambda, \text{ und } c,\ c' \text{ Constanten sind, die durch die} \\ \text{folgenden Gleichungen bestimmt werden:} \\ C_0 = \dfrac{1.9.25\dots(2i-1)^2}{2.1.2.3\dots(2i-1)}\,\dfrac{(-1)^i}{1.2.3\dots 2i} = \dfrac{(-1)^i}{i.4^i(1.2\dots i-1)^2}, \\ C_0 = c\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2i}\lambda\, d\lambda, \\ C'_0 = -2C_0\left\{1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2i-1}\right\}, \\ C'_0 = 2c\displaystyle\int_0^\pi \left[\frac{1}{2i}-(q'+c')\sin^{2i}\lambda\right]d\lambda. \end{cases}$$

Für die Gleichung (23.) ist nun $a=1$, $l=-1$, $m=\frac{1}{2}$, $i=1$. Man erhält daher durch einfache Rechnung:

$$A'_1 = 1,\quad C_0 = -\tfrac{1}{4},\quad c = -\frac{1}{2\pi},\quad C'_0 = \tfrac{1}{2},$$

$$q = \tfrac{1}{2}(\lambda-\pi-\sin\lambda\cos\lambda),\quad q' = (\pi-\lambda)\operatorname{cotg}\lambda,\quad c' = \tfrac{1}{2}.$$

Bestimmen wir demnach V, und multipliciren dasselbe gemäfs der Gleichung (25.) mit $t^{\frac{1}{2}}$, so erhält man als Integral der Gleichung (23.):

$$(30.)\qquad \omega = t^2\int_0^\pi \varphi(t\cos\lambda+v)\sin^2\lambda\, d\lambda + \left[\psi(t+v) + t\frac{\partial\psi(t+v)}{\partial t}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi}t^2\log t\int_0^\pi \psi'(t\cos\lambda+v)\sin^2\lambda\, d\lambda$$

$$-\frac{1}{\pi}t^2\int_0^\pi \psi'(t\cos\lambda+v)\left[\tfrac{1}{2}-(\tfrac{1}{2}+(\pi-\lambda)\operatorname{cotg}\lambda)\sin^2\lambda\right]d\lambda.$$

Setzt man nun hierin für t und v die vermittelst der Gleichungen (10.), (19.), (22.) sich ergebenden Ausdrücke durch p, q, so erhält man das allgemeine

Integral der Gleichung (9.), und vermittelst der Gleichungen (7.), wie schon in No. 2 bemerkt worden, durch einfache Differentiation das Integral der Gleichung (1.) selbst.

5.

Ich füge noch folgende Einzelnheiten hinzu:

Man kann sich durch sehr einfache Rechnung überzeugen, dafs die Gleichung (1.) befriedigt wird, wenn man an die Stelle von p und q respective $p+\sqrt{1+p^2}$ und $q+\sqrt{1+q^2}$ setzt.

Ferner sieht man leicht, dafs wenn ω ein Integral der Differentialgleichung (9.) ist, auch $\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}(1+p^2)$ und $\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}(1+q^2)$ solche sind.

Ferner kann man auf folgende Weise zu einer besonderen Reihe particularer Integrale der Gleichung (9.) gelangen.

Indem wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial\omega}{\partial p}=P,\quad \frac{\partial\omega}{\partial q}=Q,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial p^2}=R,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial p\partial q}=S,\quad \frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}=T$$

setzen, sei

$$(31.)\qquad R=\frac{1+q^2}{c}\frac{\partial^2\mu}{\partial p\partial q},\quad \text{also}\quad T=\frac{1+p^2}{c}\frac{\partial^2\mu}{\partial p\partial q},$$

wo c eine beliebige Constante und μ eine noch zu bestimmende Function von p und q sei. Man erhält durch Integration dieser Gleichungen, mit Vernachlässigung der willkürlichen Functionen,

$$P=\frac{1+q^2}{c}\frac{\partial\mu}{\partial q},\qquad Q=\frac{1+p^2}{c}\frac{\partial\mu}{\partial p},$$

und hieraus, wegen $\frac{\partial P}{\partial q}=\frac{\partial Q}{\partial p}$,

$$(32.)\qquad 2q\frac{\partial\mu}{\partial q}-2p\frac{\partial\mu}{\partial p}=(1+p^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-(1+q^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}.$$

Setzen wir ferner

$$(33.)\qquad \frac{1+p^2}{c}R=\lambda,\qquad \frac{1+q^2}{c}T=\lambda,$$

so folgt durch successive Differentiation nach p und q

$$2p\frac{\partial R}{\partial q}-2q\frac{\partial T}{\partial p}=(1+q^2)\frac{\partial^2 T}{\partial p\partial q}-(1+p^2)\frac{\partial^2 R}{\partial p\partial q},$$

oder, da $\frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial S}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial q}$, etc.

$$(34.)\quad 2p\frac{\partial S}{\partial p} - 2q\frac{\partial S}{\partial q} = (1+q^2)\frac{\partial^2 S}{\partial q^2} - (1+p^2)\frac{\partial^2 S}{\partial p^2}.$$

Aus der Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung (32.) folgt, dafs man $S = \mu$ setzen kann. Alsdann geht (31.) über in

$$R = \frac{1+q^2}{c}\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q},\qquad T = \frac{1+p^2}{c}\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q},$$

oder, wie leicht zu finden, in

$$(35.)\quad R = \frac{1+q^2}{c}\frac{\partial^2 R}{\partial q^2},\qquad T = \frac{1+p^2}{c}\frac{\partial^2 T}{\partial p^2}.$$

Es handelt sich also um die Integration einer Differentialgleichung von der Form

$$(36.)\quad y'' = \frac{cy}{1+x^2}.$$

Entwickelt man die Function nach steigenden Potenzen von x und bezeichnet mit $y_0^{(m)}$ den Werth der m^{ten} Ableitung für $x=0$, so ist

$$y_0^{(2m+2)} = [c-2m(2m-1)][c-(2m-2)(2m-3)] \times [c-(2m-4)(2m-5)]\dots[c-2]\,ca,$$

$$y_0^{(2m+3)} = [c-(2m+1)2m][c-(2m-1)(2m-2)] \times [c-(2m-3)(2m-4)]\dots[c-6]\,cb,$$

worin $a = y_0$, $b = y_0'$.

Nimmt man z. B. $b=0$, so hat man die Recursionsformel:

$$y_0^{(m+4)} = y_0^{(m+2)}[c-(m+2)(m+1)],$$

und die Reihe lautet

$$y = a + \frac{x^2}{1.2}ca + \frac{x^4}{1.2.3.4}(c-2)ca + \frac{x^6}{1.2\dots6}(c-12)(c-2)ca$$
$$+ \frac{x^8}{1.2.3\dots8}(c-30)(c-12)(c-2)ca + \frac{x^{10}}{1.2.3\dots10}(c-56)(c-30)(c-12)(c-2)ca + \cdots,$$

eine Reihe, die für $-1 < x < 1$ convergirt.

Für die Zahlen $c = 2, 12, 30, 56$ etc., überhaupt für $c = 2m(2m-1)$, wo m eine ganze Zahl ist, hat die Reihe nur eine endliche Anzahl von Gliedern, und man erhält particulare Integrale der Gleichung (36.) in endlicher Form, und daraus auf bekannte Weise die allgemeinen. Mit Hülfe der For-

meln (35.) lassen sich alsdann particulare Integrale der Differentialgleichung (9.) herleiten.

Hätte man bei der Integration der Gleichungen (31.) die willkürlichen Functionen mitberücksichtigt, so hätte man statt der Gleichung (32.) eine von folgender Form:

$$2q\frac{\partial\mu}{\partial q}-2p\frac{\partial\mu}{\partial p} = (1+p^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial p^2}-(1+q^2)\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2}+\varphi(p)+\psi(q)$$

erhalten, und es handelte sich darum, diese Differentialgleichung mit Rücksicht auf das Integral $\mu = S$ der Gleichung (32.) zu integriren, um zum allgemeinen Integrale der Gleichung (9.) überzugehen.

Berlin, im Januar 1860.

Zur Abhandlung: „Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen," pag. 231 des vorigen Bandes.

(Von Herrn *E. B. Christoffel.*)

Herr *Heine* hat im §. 7 der genannten Abhandlung die Zähler und Nenner der Näherungswerthe des Kettenbruchs für

$$(1.)\qquad u = \frac{F\left(k, k, \gamma+1, \frac{x}{k^2}\right)}{F\left(k, k, \gamma, \frac{x}{k^2}\right)}, \qquad k = \infty$$

gefunden, und zwar erfordert der dort eingeschlagene Weg die gesonderte Bestimmung der beiden auf einander folgenden Zähler P_{2m}, P_{2m+1} und der entsprechenden Nenner Q_{2m}, Q_{2m+1}. Es dürfte von einigem Interesse sein, *dafs diese vier Functionen sämmtlich in einer einzigen Form enthalten sind.*

Bestimmt man nämlich zwei Reihen von Functionen V und W durch die Gleichungen

$$(2.)\left\{\begin{array}{l} V_0 = 1,\quad V_1 = \gamma+1,\quad V_2 = (\gamma+2)V_1 + x,\quad V_3 = (\gamma+3)V_2 + xV_1,\ \ldots \\ \qquad V_{m+3} = (\gamma+m+3)V_{m+2} + xV_{m+1}, \\ W_0 = \gamma\qquad W_1 = (\gamma+1)W_0 + x,\ W_2 = (\gamma+2)W_1 + xW_0, \ldots \\ \qquad W_{m+2} = (\gamma+m+2)W_{m+1} + xW_m, \end{array}\right.$$

so ist

$$\frac{V_m}{W_m} = \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{x}{\gamma+1+\ddots+\cfrac{x}{\gamma+m}}} = \begin{bmatrix} 1, & x, & x, & \ldots & x \\ \gamma, & \gamma+1, & \gamma+2, & \ldots & \gamma+m \end{bmatrix},$$

mithin $\frac{V_m}{W_m}$ der $m+1^{\text{te}}$ Näherungswerth des Kettenbruchs für $\frac{u}{\gamma}$. Folglich können γV_m und W_m von P_m und Q_m nur durch ein und denselben constanten Factor verschieden sein.

Vergleicht man in (2.) die über einander stehenden Gleichungen, so zeigt sich sofort, dafs, wenn

$$(3.)\qquad V_m = \varphi(x, \gamma+1, m)$$

gesetzt wird, zugleich

$$(4.)\qquad W_m = \varphi(x, \gamma, m+1)$$

sein mufs; damit ist die oben aufgestellte Behauptung erwiesen. Es ergiebt sich

$$(5.)\qquad \varphi(x,\gamma,m) = \Sigma(m-s)_s \frac{\Gamma(\gamma+m-s)}{\Gamma(\gamma+s)} x^s,$$

wo s die Werthe 0, 1, 2, ... bis zur gröfsten in $\frac{1}{2}m$ enthaltenen ganzen Zahl inclusive durchläuft, und statt des Quotienten der beiden Γ die entsprechende Facultät zu setzen ist. Mittelst dieser Bezeichnung wird nun

$$(6.)\quad \begin{cases} (\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+2m-1)P_{2m} = \varphi(x,\gamma+1,2m-1), \\ (\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+2m)\quad P_{2m+1} = \varphi(x,\gamma+1,2m), \\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+2m-1)Q_{2m} = \varphi(x,\gamma,2m), \\ \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+2m)\quad Q_{2m+1} = \varphi(x,\gamma,2m+1). \end{cases}$$

Der Werth von u läfst sich stets in ausgeführter Form angeben, so oft γ die Hälfte einer positiven und ungeraden Zahl ist. Für $\gamma = \frac{1}{2}$ findet man denselben in der Abhandlung des Herrn ***Heine;*** ist

$$(7.)\qquad \gamma = \tfrac{1}{2}(2n+3),\quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

so setze man

$$(8.)\qquad x = \tfrac{1}{4}y^2,$$

und

$$(9.)\qquad \mathfrak{A}_n = \tfrac{1}{2}e^{-y}\frac{\partial^{n+1}e^y}{\partial x^{n+1}},\qquad \mathfrak{B}_n = -\tfrac{1}{2}e^y\frac{\partial^{n+1}e^{-y}}{\partial x^{n+1}},$$

oder in anderer Form

$$(10.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = \dfrac{\partial^n}{\partial y^n}\dfrac{1-\frac{2y}{1}+\frac{(2y)^2}{1.2}-\dots\pm\frac{(2y)^n}{1.2\dots n}}{y^{n+1}}, \\[2ex] \mathfrak{B}_n = \dfrac{\partial^n}{\partial y^n}\dfrac{1+\frac{2y}{1}+\frac{(2y)^2}{1.2}+\dots+\frac{(2y)^n}{1.2\dots n}}{y^{n+1}}, \end{cases}$$

dann wird

$$(11.)\qquad \frac{u}{\gamma} = \begin{bmatrix} 1, & x, & x, & \\ \gamma, & \gamma+1, & \gamma+2, & \dots \end{bmatrix} = \frac{e^y\mathfrak{A}_{n+1}-e^{-y}\mathfrak{B}_{n+1}}{e^y\mathfrak{A}_n-e^{-y}\mathfrak{B}_n},$$

und nach dem Früheren ist hiervon der $m+1^{\text{te}}$ Näherungswerth

$$(12.)\qquad \frac{V_m}{W_m} = \frac{\varphi(x,\frac{1}{2}(2n+5),\ m\ )}{\varphi(x,\frac{1}{2}(2n+3),m+1)},$$

welcher sich auch in die zu (11.) ganz analoge Form

$$\frac{\mathfrak{B}_{m+n+2}\mathfrak{A}_{n+1}-\mathfrak{A}_{m+n+2}\mathfrak{B}_{n+1}}{\mathfrak{B}_{m+n+2}\mathfrak{A}_{n}-\mathfrak{A}_{m+n+2}\mathfrak{B}_{n}}.$$

bringen läfst.

Die Functionen φ scheinen zu einer gröfseren Rolle bestimmt zu sein, als sich aus ihrer Beziehung zur hypergeometrischen Reihe vermuthen läfst. Sie stehen nämlich mit den Integralen der *Riccati*schen Gleichung in einem so genauen Zusammenhange, dafs man fast in allen Untersuchungen auf sie geführt wird, welche ein näheres Eingehen auf die Natur dieser Integrale erfordern.

Berlin, im März 1860.

Zur Theorie der algebraischen Flächen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

1.

In jedem Punkt einer Oberfläche können unendlich viele gerade Linien dieselbe berühren; unter diesen giebt es bekanntlich im Allgemeinen nur zwei, für welche diese Berührung dreipunktig werden kann (Haupttangenten). Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten eines Punktes einer Oberfläche der n^{ten} Ordnung, deren Gleichung $u=0$ ist, und ist

$$u_{ikh\ldots} = \frac{\partial^\mu u}{\partial x_i \partial x_k \partial x_h \ldots},$$

so ist es für die fraglichen Richtungen nothwendig, dafs die ersten beiden Differentiale der Gleichung $u=0$ verschwinden, d. h. dafs die Gleichungen bestehen:

$$(1.)\qquad \Sigma u_i\, dx_i = 0, \qquad \Sigma u_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0.$$

Da ferner die Gröfsen x_1, x_2, x_3, x_4 den Abständen des Punktes von irgend vier Ebenen proportional sein können, so kann man noch immer vier Constanten k bestimmen, so dafs

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 = 1,$$

also

$$(2.)\qquad \Sigma k_i\, dx_i = 0.$$

Die Gleichungen (1.), (2.) bilden ein System von Differentialgleichungen, von welchen zwei Integrale bekannt sind; und welche, integrirt, solche Curven auf der Oberfläche angeben, deren Tangenten sämmtlich Haupttangenten der Oberfläche sind, und deren zwei durch jeden Punkt der Oberfläche hindurchgehen (Curven der Haupttangenten).

Unter den Punkten der Oberfläche sind diejenigen mit Recht hervorgehoben worden, in welchen beide Haupttangenten zusammenfallen. Diese Punkte liegen auf einer Curve

$$(3.)\qquad \Delta = 0,$$

wo

$$\Delta = \Sigma \pm u_{11} u_{22} u_{33} u_{44}$$

die Determinante der Oberfläche bedeutet; ohne dafs jedoch im Allgemeinen diese Curve die Curven der Haupttangenten berührte.

Wenn man ferner Punkte der Oberfläche aufsucht, in welchen dieselbe insbesondere ausgezeichnete Tangenten zuläfst, so bietet sich augenblicklich eine grofse Mannigfaltigkeit von Aufgaben dar. Man kann der Vollständigkeit wegen bemerken, dafs jeder Punkt einer Oberfläche auch Berührungspunkt einer Doppeltangente werden kann. Dann giebt es gewisse Curven auf der Oberfläche, in denen eine gerade Linie

a. vierpunktig berühren kann, oder

b. dreipunktig, doch so dafs dieselbe Tangente noch einmal an einem andern Punkte einfach berührt;

c. umgekehrt, einfach, doch so dafs die Tangente Haupttangente eines andern Punktes wird; oder

d. einfach berührt, zugleich aber in zwei andern Punkten ebenfalls einfach.

Endlich giebt es gewisse einzelne Punkte der Oberfläche, in welchen eine Tangente

α. fünfpunktig berühren kann,

β. vierpunktig, zugleich aber an einer andern Stelle einfach,

γ. dreipunktig, noch aufserdem aber an einer andern Stelle ebenfalls dreipunktig,

δ. dreipunktig, doch so dafs dieselbe an zwei andern Stellen einfach berührt,

ε. einfach, doch so dafs dieselbe Tangente noch in drei andern Punkten einfach berührt,

ζ. einfach, während dieselbe Tangente noch einmal einfach und einmal dreipunktig berührt,

η. einfach, während dieselbe Tangente noch einmal vierpunktig berührt.

Nimmt man hierzu die Aufgaben, welche aus der Forderung entstehen, dafs eine der Berührungen *a, b, c, d* zweimal in einem Punkte, oder zwei derselben in einem Punkte eintreten sollen, so erhält man weitere Punktsysteme, welche sich als die Durchschnitte und die (nothwendig existirenden) Doppelpunkte der Curven *a, b, c, d* characterisiren.

Alle diese Aufgaben kann man (ohne auf die einfachste Darstellung zu kommen) durch dasselbe Verfahren formuliren, welches in der Geometrie der Ebene bei der Bestimmung der Doppeltangenten einer Curve zur Anwendung kommt. Sind y_1, y_2, y_3, y_4 die Coordinaten eines Punktes, welcher in der Ebene

$$(4.)\qquad c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4 = 0$$



liegt, und sind also $x_i + \lambda y_i$ die Coordinaten eines Punktes in der Verbindungslinie von x und y, so erhält man die Bedingung dafür, dafs dieser Punkt auf der Oberfläche liege, in der Form

$$(5.) \quad [u] = u + \frac{\lambda}{1} Du + \frac{\lambda^2}{1.2} D^2 u + \frac{\lambda^3}{1.2.3} D^3 u \ldots = 0,$$

wo

$$(6.) \quad D^{(k)} u = \Sigma \frac{\partial^k u}{\partial x_i \partial x_h \ldots} y_i y_h \ldots.$$

In der Gleichung (5.) ist u immer $= 0$, ferner, sobald die Verbindungslinie von x, y Tangente der Oberfläche sein soll, auch

$$Du = 0;$$

fernere Bedingungen aber, welchen diese Tangente in den oben gedachten Problemen unterworfen sein soll, geben Bedingungen zwischen den Coefficienten der Gleichung (5.), welche sehr leicht aufzustellen sind, und somit Gleichungen zur Bestimmung der x, y. Diese Gleichungen enthalten immer noch die beliebig eingeführten Constanten c, welche in der einfachsten Darstellung der Gleichungen nicht mehr vorkommen dürfen; und eben diese Darstellung scheint mit grofsen Schwierigkeiten verbunden.

Es soll im Folgenden die einfachste Frage behandelt werden, nämlich nach der Curve derjenigen Punkte, in welchen eine vierpunktige Berührung möglich ist.

Dieses Problem hat schon vor längerer Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen, namentlich in der speciellen Gestalt, unter welcher es bei den Oberflächen der dritten Ordnung auftritt. In jeder Oberfläche der dritten Ordnung zerfällt diese Curve in ein System von 27 Geraden, welches höchst merkwürdige Eigenschaften zeigt; man vergleiche die Aufsätze von *Cayley*, im 4ten Bande des Cambridge and Dublin mathematical journal, p. 118; *Salmon*, ebenda p. 252; *Schläfli*, Quarterly Journal, vol. 2, p. 55 und 110; vor Allem die an Resultaten überreiche Abhandlung von *Steiner* „über die Flächen dritten Grades" (Bd. 53, p. 133 dieses Journals). Die erwähnte Abhandlung von *Salmon* gedenkt aber auch des allgemeinen Problems und zeigt, indem der oben angedeutete Weg verfolgt wird, dafs die Curve der vierpunktigen Berührungen durch Elimination der y aus den Gleichungen

$$Du = 0, \quad D^2 u = 0, \quad D^3 u = 0,$$
$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = 0$$

hervorgehen müsse. Herr *Salmon* findet, dafs das Resultat dieser Elimination

eine Gleichung des $11n-24^{\text{sten}}$ Grades in Bezug auf die Coordinaten sein müsse; ohne aber die Darstellung dieser Gleichung selbst zu versuchen. Von eben diesen Gleichungen beginnend, habe ich die Darstellung der Eliminationsgleichung, befreit von jedem willkürlichen Factor, ausgeführt; und diese Darstellung, verbunden mit einigen allgemeinen Sätzen, welche aus der Form der resultirenden Function folgen, bilden den Inhalt der folgenden Betrachtungen.

2.

Wenn die Verbindungslinie von x und y im Punkte x die Oberfläche vierpunktig berühren soll, so müssen nach (4.), (5.) gleichzeitig folgende Gleichungen bestehen:

$$u=0, \quad Du=0, \quad D^2u=0, \quad D^3u=0,$$
$$c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4 = 0,$$

oder die gesuchten Punkte x liegen auf der Schnittcurve von $u=0$ mit derjenigen Oberfläche, deren Gleichung durch die Elimination der y aus den vier Gleichungen

$$(7.)\quad \begin{cases} c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3+c_4y_4 = 0, \\ Du = \Sigma u_i y_i = 0, \\ D^2u = \Sigma u_{ik} y_i y_k = 0, \\ D^3u = \Sigma u_{ikh} y_i y_k y_h = 0 \end{cases}$$

hervorgeht. Da von diesen Gleichungen aber, in Bezug auf die y, eine vom zweiten, die letzte vom dritten Grade ist, so macht die Ausführung der Elimination besondere Betrachtungen nothwendig. Man kann sich zu diesem Ende zunächst die y aus den ersten drei Gleichungen bestimmt denken; es seien dann y_1', y_2', y_3', y_4' und y_1'', y_2'', y_3'', y_4'' die beiden Systeme von Lösungen, welche sich ergeben. Führt man diese Werthe in die Gleichung

$$D^3u = F(y) = 0$$

ein, und bildet dann das Product

$$(8.)\quad F(y').F(y'') = 0,$$

so ist dieses die verlangte Eliminationsgleichung in rationaler Form.

Wenn man aber vorläufig die Veränderlichkeit der x aufser Augen läfst, so stellen die ersten drei Gleichungen (7.) zwei Ebenen und eine Oberfläche der zweiten Ordnung dar, und zwar so dafs eine der Ebenen $(Du=0)$ zugleich Berührungsebene der Oberfläche zweiter Ordnung ist. Dieselbe schneidet also die Oberfläche $D^2u=0$ in zwei geraden Linien; oder, analytisch

ausgedrückt, man kann immer (und zwar auf unendlich viele Arten) vier Gröfsen t_1, t_2, t_3, t_4 so bestimmen, dafs der Ausdruck

$$(9.)\quad D^2u+(t_1y_1+t_2y_2+t_3y_3+t_4y_4)Du$$

in das Product zweier linearen Factoren

$$(10.)\quad (p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3+p_4y_4)(q_1y_1+q_2y_2+q_3y_3+q_4y_4)$$

übergeht. Es ist sogar sehr leicht zu zeigen, dafs die t nur den folgenden beiden Bedingungen zu genügen haben:

$$\begin{aligned} t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3+t_4x_4 &= -2(n-1), \\ \Sigma U_{ik}t_it_k &= 0, \end{aligned}$$

wo die U_{ik} die Unterdeterminanten von $\varDelta$ bezeichnen.

Man erhält sodann aber unmittelbar die Systeme der y', y'' mit Hülfe der linearen Gleichungen:

$$(11.)\quad \begin{cases} \Sigma c_iy'_i=0, & \Sigma c_iy''_i=0, \\ \Sigma u_iy'_i=0, & \Sigma u_iy''_i=0, \\ \Sigma p_iy'_i=0, & \Sigma q_iy''_i=0, \end{cases}$$

so dafs die y', y'' selbst als die Coefficienten der a in den beiden Determinanten

$$(12.)\quad R=\Sigma\pm a_1c_2u_3p_4,\quad R'=\Sigma\pm a_1c_2u_3q_4$$

betrachtet werden können.

Nun kann man den Ausdruck D^3u dargestellt betrachten durch die symbolische Form

$$(a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+a_4y_4)^3,$$

sobald man nämlich den Coefficienten a die symbolische Bedeutung beilegt, dafs, nachdem der Ausdruck vollständig ausgerechnet worden, an die Stelle von $a_ia_ka_m$ der entsprechende Differentialquotient

$$u_{ikm}=\frac{\partial^3u}{\partial x_i\partial x_k\partial x_m}$$

gesetzt werden soll. Nimmt man diesen symbolischen Ausdruck an, so wird die Eliminationsgleichung (8.) von der Form:

$$\{\Sigma\pm a_1c_2u_3p_4\}^3.\{\Sigma\pm b_1c_2u_3q_4\}^3=0,$$

wo nach Ausführung der Rechnungsoperationen

$$a_ia_ka_m=b_ib_kb_m=u_{ikm}$$

zu setzen ist. Statt dieser Form betrachte ich den für die a, b symmetrischen



Ausdruck

$$(13.)\quad \{\Sigma\pm a_1c_2u_3p_4.\Sigma\pm b_1c_2u_3q_4\}^3+\{\Sigma\pm b_1c_2u_3p_4.\Sigma\pm a_1c_2u_3q_4\}^3 = 0,$$

welcher durch die gedachten Substitutionen nur in das Doppelte des ersten Ausdrucks übergeht. Ich werde nun diesen Ausdruck entwickeln, und zwar zunächst um die noch unbekannten Coefficienten p, q zu beseitigen.

3.

Es sei für den Augenblick

$$(14.)\quad \begin{cases} F = \Sigma\pm a_1c_2u_3p_4.\Sigma\pm b_1c_2u_3q_4, \\ \Phi = \Sigma\pm a_1c_2u_3q_4.\Sigma\pm b_1c_2u_3p_4. \end{cases}$$

Dann nimmt die Eliminationsgleichung (13.) die Form an:

$$(15.)\quad 0 = F^3+\Phi^3 = (F+\Phi)^3-3F\Phi(F+\Phi).$$

Die symmetrischen Ausdrücke $F+\Phi$ und $F\Phi$ sind nun leicht darzustellen. Die Factoren in F und Φ sind in Bezug auf die p, q linear, daher kann man den F, Φ die Formen geben:

$$F = \Sigma m_ip_i.\Sigma n_kq_k,$$
$$\Phi = \Sigma n_ip_i.\Sigma m_kq_k,$$

wo die Werthe der m, n aus (14.) zu entnehmen sind. Hieraus folgt unmittelbar

$$(16.)\quad \begin{cases} F+\Phi = \Sigma\Sigma m_in_k(p_iq_k+p_kq_i), \\ 4F\Phi = \Sigma\Sigma m_im_k(p_iq_k+p_kq_i)\Sigma\Sigma n_in_k(p_iq_k+p_kq_i), \end{cases}$$

wo nur noch gewisse Verbindungen der p, q vorkommen, und zwar genau dieselben, welche durch Gleichsetzung der Ausdrücke (9.) und (10.) unmittelbar sich bestimmen, indem

$$p_iq_k+q_ip_k = 2u_{ik}+t_iu_k+u_it_k$$

wird. Bemerkt man noch, dafs nach der Definition der m, n offenbar

$$\Sigma m_iu_i = \Sigma\pm a_1c_2u_3u_4 = 0,$$
$$\Sigma n_iu_i = \Sigma\pm b_1c_2u_3u_4 = 0,$$

so findet es sich, dafs die Gröfsen t aus (16.) ganz herausgehen, und dafs

$$(17.)\quad \begin{cases} \tfrac{1}{2}(F+\Phi) = \Sigma\Sigma m_in_ku_{ik}, \\ F\Phi = \Sigma\Sigma m_im_ku_{ik}.\Sigma\Sigma n_in_ku_{ik}. \end{cases}$$

Ferner aber folgt aus der blofsen Betrachtung der m, n, wie sie aus (14.)

hervorgehen, dafs man dem ersten dieser Ausdrücke die Gestalt geben kann:

$$(18.)\quad \tfrac{1}{2}(F+\Phi) = -\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & a_1 & c_1 & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & a_2 & c_2 & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & a_3 & c_3 & u_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & a_4 & c_4 & u_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

während $F\Phi$ in das Product zweier ähnlichen Ausdrücke übergeht, die man aus diesem erhält, wenn einmal statt der b die a, das andere Mal statt der a die b gesetzt werden.

Da im Folgenden Determinanten dieser Art fortwährend in die Rechnung eingehen, so werde ich der Kürze halber jede Determinante dieser Art durch

$$(19.)\quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \dots \\ \varepsilon & \zeta & \eta & \dots \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \dots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \dots \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \dots \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

bezeichnen. Dann ist der Gleichung (18.) zufolge:

$$(20.)\quad F+\Phi = -2\begin{pmatrix} a\,c\,u \\ b\,c\,u \end{pmatrix},\qquad F\Phi = \begin{pmatrix} a\,c\,u \\ a\,c\,u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\,c\,u \\ b\,c\,u \end{pmatrix},$$

und die Gleichung (15.) nimmt die Gestalt an:

$$(21.)\quad 0 = \begin{pmatrix} a\,c\,u \\ b\,c\,u \end{pmatrix}\left[4\begin{pmatrix} a\,c\,u \\ b\,c\,u \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} a\,c\,u \\ a\,c\,u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b\,c\,u \\ b\,c\,u \end{pmatrix}\right].$$

Die Aufgabe besteht nun zunächst darin, die c in einen dem ganzen Ausdruck gemeinsamen Factor abzusondern. Hierzu führt folgende Betrachtung:

4.

In Folge der identischen Gleichung

$$u_i = \frac{1}{n-1}\{u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3 + u_{i4}x_4\}$$

kann man in den Determinanten des Ausdrucks (21.) die Reihen u_1, u_2, u_3, u_4 mit Hülfe der übrigen Reihen vernichten, und es treten dann zugleich an die Stelle der Nullen, welche früher mit den u_1, u_2, u_3, u_4 in gleicher Reihe gestanden, die Ausdrücke:

$$(22.)\quad \begin{cases} a = a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4, \\ b = b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4, \\ c = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4. \end{cases}$$

Auf diese Weise erhält man sogleich die folgenden Transformationen:

$$(23.)\quad \begin{cases} \binom{a\,c\,u}{b\,c\,u} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c^2\binom{a}{b}-ac\binom{c}{b}-bc\binom{c}{a}+ab\binom{c}{c}\right\}, \\ \binom{a\,c\,u}{a\,c\,u} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c^2\binom{a}{a}-2ac\binom{a}{c}+a^2\binom{c}{c}\right\}, \\ \binom{b\,c\,u}{b\,c\,u} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c^2\binom{b}{b}-2bc\binom{b}{c}+b^2\binom{c}{c}\right\}. \end{cases}$$

Da ich zunächst die symbolischen Substitutionen nur bei den a ausführen will, so vereinfache ich diese Ausdrücke, indem ich setze:

$$d_i = cb_i - bc_i,$$

so dafs also

$$(24.)\quad d = d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4 = 0,$$

und hierdurch nehmen der erste und der letzte der Ausdrücke (23.) die einfachere Gestalt an:

$$\binom{a\,c\,u}{b\,c\,u} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c\binom{a}{d}-a\binom{c}{d}\right\},\qquad \binom{b\,c\,u}{b\,c\,u} = -\frac{1}{(n-1)^2}\binom{d}{d},$$

und es geht dann die Gleichung (21.) über in:

$$(25.)\quad 0=\left\{c\binom{a}{d}-a\binom{c}{d}\right\}\left[4\left(c\binom{a}{d}-a\binom{c}{d}\right)^2-3\binom{d}{d}\left\{c^2\binom{a}{a}-2ac\binom{a}{c}+a^2\binom{c}{c}\right\}\right].$$

Diese Form ist für die Ausrechnung sehr bequem. Nach Ausführung der symbolischen Substitutionen ist nämlich offenbar

$$(26.)\quad \begin{cases} a^3 = n.n-1.n-2.u = 0, \\ a^2\binom{a}{c} = -\Sigma U_{ik}u_{ipq}c_kx_px_q = -(n-2)\Sigma U_{ik}u_{iq}c_kx_q = -(n-2)\Delta.c, \\ \text{ebenso} \\ a\binom{a}{a} = -4(n-2)\Delta, \\ a\binom{a}{c}\binom{a}{d} = -(n-2)\Delta\binom{c}{d}. \end{cases}$$

Wendet man diese Ausdrücke auf (25.) an, so kommt:

$$(27.)\quad \begin{cases} \left\{c\binom{a}{d}-a\binom{c}{d}\right\}^3 = c^3\binom{a}{d}^3+3(n-2)\varDelta c^2\binom{c}{d}\binom{d}{d}-3cd(n-2)\varDelta\binom{c}{d}^2, \\ \left\{c\binom{a}{d}-a\binom{c}{d}\right\}\left\{c^2\binom{a}{a}-2ac\binom{a}{c}+a^2\binom{c}{c}\right\} \\ \qquad = c^3\binom{a}{d}\binom{a}{a}+4c^2(n-2)\varDelta\binom{c}{d}-(n-2)\varDelta cd\binom{c}{c}. \end{cases}$$

Setzt man dies in die Gleichung (25.) ein und berücksichtigt die Gleichungen (24.), so scheidet sich der Factor c^3 aus, und es bleibt

$$(28.)\quad 0=\binom{a}{d}\left[4\binom{a}{d}^2-3\binom{a}{a}\binom{d}{d}\right].$$

Man bemerkt, dafs von dem Ausdruck (25.) nur der Coefficient der höchsten Potenz von c übriggeblieben ist.

Führt man jetzt, um diese Form weiter zu vereinfachen, für die d ihre Werthe aus (24.) ein, so hat man

$$(29.)\quad 0=\left(c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right)\left[4\left(c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right)^2-3\binom{a}{a}\left\{c^2\binom{b}{b}-2bc\binom{b}{c}+b^2\binom{c}{c}\right\}\right].$$

Dies ist wiederum dieselbe Form wie (25.), nur dafs die b an die Stelle der a, die a an die Stelle der d getreten sind. Die Gleichungen (27.) geben also, hierauf angewandt:

$$\begin{gathered} \left\{c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right\}^3 = c^3\binom{b}{a}^3+3(n-2)\varDelta c^2\binom{c}{a}\binom{a}{a}-3ca(n-2)\varDelta\binom{c}{a}^2, \\ \binom{a}{a}\left\{c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right\}\left\{c^2\binom{b}{b}-2bc\binom{b}{c}+b^2\binom{c}{c}\right\} \\ = \left[c^3\binom{b}{a}\binom{b}{b}+4c^2(n-2)\varDelta\binom{c}{a}-(n-2)\varDelta ca\binom{c}{c}\right]\binom{a}{a}. \end{gathered}$$

In beiden Ausdrücken können endlich die letzten Glieder mit Hülfe von (26.) nochmals reducirt werden auf

$$3(n-2)^2\varDelta^2 c\binom{c}{c} \quad \text{und} \quad 4(n-2)^2\varDelta^2 c\binom{c}{c}.$$

Führt man die so transformirten Ausdrücke in (29.) ein, so scheidet sich abermals ein Factor c^3 aus, und es bleibt die verlangte Gleichung zurück, befreit von jedem überflüssigen Factor:

$$(30.)\quad 0=\binom{b}{a}\left[4\binom{b}{a}^2-3\binom{b}{b}\binom{a}{a}\right].$$

Um nun mit Bequemlichkeit diesen Ausdruck in die gewöhnlichen Zeichen überzuführen, bemerke ich noch, dafs nach einem bekannten, von Herrn *Hesse*

oft angewandten Determinantensatze:

$$\Delta\binom{ab}{ab} = \binom{a}{a}\binom{b}{b} - \binom{a}{b}^2.$$

Hierdurch kann man der Gleichung (30.) die Gestalt geben:

$$(31.) \quad 0 = \binom{b}{a}\binom{a}{a}\binom{b}{b} - 4\Delta\binom{b}{a}\binom{ab}{ab}.$$

Ich führe jetzt die beiden Covarianten ein:

$$(32.) \quad \begin{cases} \Theta = -\binom{b}{a}\binom{a}{a}\binom{b}{b}, \\ T = -\binom{b}{a}\binom{ab}{ab}, \end{cases}$$

wodurch die gesuchte Oberfläche in

$$(33.) \quad F = \Theta - 4\Delta T = 0$$

übergeht. Die Form Θ wird, wenn man für die $\binom{b}{a}$ etc. ihre Werthe einsetzt:

$$(34.) \quad \Theta = \Sigma\Sigma\Sigma U_{ik} U_{mn} U_{pq} u_{ikp} u_{mnq};$$

und wenn man noch durch Δ_p den Differentialquotienten

$$\Delta_p = \frac{\partial \Delta}{\partial x_p} = \Sigma_{ik} U_{ik} u_{ikp}$$

bezeichnet, erhält man die sehr einfache Gestalt:

$$(35.) \quad \Theta = \Sigma U_{pq} \Delta_p \Delta_q.$$

Diese Form ist vom $(11n-24)^{\text{sten}}$ Grade.

Die Function T scheint im Allgemeinen keiner so einfachen Gestaltung fähig. Bezeichnet man den zweiten Differentialquotienten von Δ nach den Elementen u_{ik}, u_{mn} (wobei u_{ik} von u_{ki} unterschieden werden mufs) durch $U_{ik,mn}$, so erhält man unmittelbar

$$(36.) \quad T = \Sigma U_{pq} U_{ik,mn} u_{ikp} u_{mnq},$$

ein Ausdruck, welcher vom Grade $5(n-2)+2(n-3) = 7n-16$ ist. Für Oberflächen dritter Ordnung insbesondere, wo u_{ikp}, u_{mnq} constante Zahlen sind, ist hiernach

$$(37.) \quad T = \Sigma U_{pq} \Delta_{pq},$$

wenn Δ_{pq} den zweiten Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_p \partial x_q}$ bezeichnet.

Man kann also jetzt den Satz aussprechen:

Die Berührungspunkte der vierpunktig berührenden Tangenten liegen auf der Schnittcurve von u mit einer Oberfläche der $(11n-24)^{\text{sten}}$

Ordnung, deren Gleichung durch

$$F = \Theta - 4\Delta T = 0$$

ausgedrückt ist.

5.

Es ist schon oben erwähnt, dafs die Schnittcurve von F und u nothwendig Doppelpunkte besitzt; solche Punkte nämlich, in welchen beide Haupttangenten vierpunktig berühren. Indefs scheint es sehr schwierig, diese Punkte genau zu bestimmen, oder auch nur die Zahl derselben anzugeben. Man kann indefs leicht unendlich viele Oberflächen angeben, welche die Eigenschaft haben, durch diese Punkte hindurchzugehen. Erinnert man sich der Gleichung (8.), so ist es offenbar für diese Punkte nothwendig, dafs zugleich $F(y') = 0$ und $F(y'') = 0$, oder dafs in der symbolischen Ausdrucksweise nach (12.) R^3 und R'^3 gleichzeitig verschwinden. Wendet man dies auf die Gleichung (13.) und die daraus folgenden an, so zeigt es sich, ***dafs der Ausdruck*** (13.) ***etc. schon verschwinden mufs, sobald nur für die a die symbolische Substitution geschieht***, während für die b irgend eine andere symbolische Substitution

$$b_i b_k b_m = b_{ikm}$$

ausgeführt werden kann, wo die b_{ikm} irgend welche Werthe bezeichnen. Wenn man daher die Gleichung (28.) in dieser Weise betrachtet, so kann man dieselbe als Gleichung eines Oberflächensystems ansehen, welches noch die willkürlichen Constanten b, c enthält. Diese Oberflächen sind dann vom $(10n-18)^{\text{ten}}$ Grade. ***Man kann also unendlich viele Oberflächen des*** $(10n-18)^{\text{ten}}$ ***Grades angeben, welche durch die Doppelpunkte der Schnittcurve von F und u hindurchgehen.***

6.

Sehr bemerkenswerth ist der Zusammenhang der Oberfläche $F = 0$ mit der Oberfläche $\Delta = 0$. Man erkennt nämlich leicht, ***dafs die Oberflächen $F = 0$ und $\Delta = 0$ sich in einer Curve berühren.***

Die Gleichung $F = 0$ reducirt sich für ihren Schnitt mit $\Delta = 0$ auf

$$\Theta = 0 = \Sigma U_{pq} \Delta_p \Delta_q.$$

Erinnert man sich nun einer bekannten Formel, so kann man die folgende identische Gleichung bilden, in welcher α_1, α_2, α_3, α_4 beliebige, etwa constante Gröfsen bezeichnen mögen:

$$\Delta . \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \Delta_1 & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \Delta_2 & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \Delta_3 & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \Delta_4 & \alpha_4 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \Delta_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \Delta_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \Delta_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \Delta_4 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 \end{vmatrix}^2;$$

oder nach der oben eingeführten Bezeichnung:

$$\Delta\binom{\alpha\,\Delta}{\alpha\,\Delta} = \binom{\Delta}{\Delta}\binom{\alpha}{\alpha} - \binom{\Delta}{\alpha}^2.$$

Nun ist

$$\binom{\Delta}{\Delta} = -\Theta;$$

durch den Schnitt von Δ und Θ geht also auch die Oberfläche $\binom{\Delta}{\alpha}^2$, welche zwei unendlich nahe Schnittcurven oder eine Berührungscurve durch das Quadrat andeutet. Da nun $\binom{\Delta}{\alpha} = 0$ eine Oberfläche des $(7n-15)^{\text{ten}}$ Grades darstellt, so hat man den Satz:

> ***Die Oberfläche $F = 0$ wird von der Oberfläche $\Delta = 0$ in einer Curve berührt, durch welche sich unendlich viele Oberflächen des $(7n-15)^{\text{ten}}$ Grades hindurchlegen lassen.***

Die Schnittpunkte dieser Curve mit der Oberfläche $u = 0$ sind in vieler Hinsicht bemerkenswerth. Sie sind einerseits diejenigen Punkte der Curve $F = 0$, $u = 0$, in welchen beide Haupttangenten zusammenfallen, weil diese Eigenschaft allen Punkten der Curve $\Delta = 0$, $u = 0$ zukommt; andrerseits aber sind sie ***die einzigen Punkte, in welchen die Curve der Wendepunkte*** ($\Delta = 0$, $u = 0$) ***eine Curve der Haupttangenten berühren kann.*** Sucht man nämlich diese Punkte auf, so müssen in denselben die Gleichungen (1.), (2.) für die Richtung der Haupttangenten zusammen mit

$$d\Delta = \Delta_1 dx_1 + \Delta_2 dx_2 + \Delta_3 dx_3 + \Delta_4 dx_4 = 0$$

bestehen. Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen die Verhältnisse der dx,

so erhält man

$$0 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \Delta_1 & u_1 & k_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \Delta_2 & u_2 & k_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \Delta_3 & u_3 & k_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \Delta_4 & u_4 & k_4 \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Reducirt man aber diese Determinante mit Hülfe der Gleichung

$$(n-1)u_i = u_{i1}x_1 + u_{i2}x_2 + u_{i3}x_3 + u_{i4}x_4$$

und bemerkt, dafs $\Delta = 0$, so erhält man unmittelbar

$$0 = \Theta.(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4)^2 = \Theta;$$

so dafs die Schnittpunkte von $\Delta = 0$, $\Theta = 0$, $u = 0$ wirklich allein die gedachte Eigenschaft haben.

Der oben ausgesprochene Satz giebt nun aber, angewandt auf die Curven, welche sich auf der Oberfläche $u = 0$ darstellen, den Satz:

Die Curve der Wendepunkte berührt die Curve der Berührungspunkte vierpunktiger Tangenten überall, wo sie derselben begegnet; und zwar geschieht dies in $2n(n-2)(11n-24)$ verschiedenen Punkten.

Die angebene Zahl folgt daraus, dafs die Oberflächen $u = 0$, $\Theta = 0$, $F = 0$ sich nothwendig in $n.4(n-2).(11n-24)$ Punkten treffen, also in halb so viel Punkten sich berühren müssen.

Ferner aber:

Durch diese Punkte lassen sich unendlich viele Oberflächen $\binom{\Delta}{\alpha}$ der $(7n-15)^{ten}$ Ordnung hindurchlegen. Diese schneiden die Curve der Wendepunkte noch in

$$4n(n-2)(7n-15) - 2n(n-2)(11n-24) = 6n(n-2)^2$$

und die Curve der vierpunktigen Berührungen in

$$n(7n-15)(11n-24) - 2n(n-2)(11n-24) = n(5n-11)(11n-24)$$

andern Punkten. In diesen Punktsystemen wird jede der beiden Curven durch andere Curven berührt, welche sie aufserdem nicht mehr schneiden, nämlich

die Curve der Wendepunkte durch den Schnitt von $u = 0$ mit der Oberfläche $3(n-2)^{ten}$ Grades $\binom{\alpha}{\alpha} = 0$,

die Curve der vierpunktigen Berührungen durch den Schnitt von $u=0$ *mit der Oberfläche des* $(10n-22)^{\text{ten}}$ *Grades* $\binom{\alpha\,\Delta}{\alpha\,\Delta}=0$.

Als Corollar ergiebt sich, da jede etwa in der Oberfläche $u=0$ enthaltene Gerade nothwendig zugleich der Oberfläche $F=0$ angehört, und mit der Oberfläche $\Delta=0$ $4(n-2)$ Punkte gemein hat, der merkwürdige Satz:

Wenn eine Oberfläche eine gerade Linie enthält, so ist dieselbe $2(n-2)$*fache Tangente der Curve der Wendepunkte.*

Hieraus geht sodann der folgende Satz unmittelbar hervor:

Eine Oberfläche n^{ter} *Ordnung kann im Allgemeinen nicht mehr als* $n(11n-24)$ *gerade Linien enthalten,* da die Anzahl der Berührungspunkte aller Geraden mit der Wendepunktscurve im Allgemeinen nicht gröfser sein kann als $2n(n-2)(11n-24)$.

7.

Eine andre Art von merkwürdigen Punkten der Curve $F=0$, $u=0$ bilden diejenigen, in welchen eine fünfpunktige Berührung möglich ist. Für diese Punkte mufs aufser den Coefficienten u, Du, D^2u, D^3u in der Gleichung (5.) auch noch D^4u verschwinden, d. h. aufser den Gleichungen (7.) mufs noch diese bestehen:

$$D^4u = \Sigma u_{ikhm} y_i y_k y_h y_m = 0.$$

Man kann alsdann eine Oberfläche suchen, welche sich mit $F=0$, $u=0$ in diesen Punkten durchschneidet; und zwar indem man genau wie oben in §. 2 verfährt, nur dafs man an die Stelle von D^3u die Function D^4u treten läfst, und sie in der symbolischen Form

$$D^4u = (a_1y_1+a_2y_2+a_3y_3+a_4y_4)^4 = (b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3+b_4y_4)^4$$

darstellt. Durch eine Rechnung, welche der oben durchgeführten ganz analog ist, gelangt man dann leicht dazu, aus der entstehenden Gleichung den Factor c^6 abzusondern; und das Resultat ist:

$$\begin{aligned}
0 = {} & c^2\left[8\binom{b}{a}^4-8\binom{a}{a}\binom{b}{b}\binom{a}{b}^2+\binom{b}{b}^2\binom{a}{a}^2\right]\\
& -4bc\left[8\binom{b}{a}^3\binom{c}{a}-4\binom{a}{a}\binom{c}{a}\binom{b}{b}\binom{b}{a}-4\binom{a}{a}\binom{b}{c}\binom{b}{a}^2+\binom{a}{a}^2\binom{b}{b}\binom{b}{c}\right]\\
& -4ac\left[8\binom{b}{a}^3\binom{c}{b}-4\binom{b}{b}\binom{c}{b}\binom{a}{a}\binom{b}{a}-4\binom{b}{b}\binom{a}{c}\binom{b}{a}^2+\binom{b}{b}^2\binom{a}{a}\binom{a}{c}\right]\\
& -16ab\left[-4\binom{a}{b}^2\binom{a}{c}\binom{b}{c}-2\binom{a}{b}^3\binom{c}{c}+2\binom{b}{c}^2\binom{a}{a}\binom{a}{b}+2\binom{a}{c}^2\binom{b}{b}\binom{a}{b}+\binom{c}{c}\binom{a}{b}\binom{b}{b}\binom{a}{a}\right].
\end{aligned}$$

In dieser Gleichung bezeichnet, wie oben, $\binom{a}{b}$ den Ausdruck

$$\binom{a}{b} = -\Sigma U_{ik} a_i b_k,$$

und ähnlich die übrigen Gröfsen; nachdem diese Werthe eingeführt worden, hat man wieder die symbolischen Substitutionen

$$a_i a_k a_h a_m = b_i b_k b_h b_m = u_{ikhm}$$

vorzunehmen, und gelangt dann zu der endlichen Darstellung, welche daraus ohne Weiteres hinzuschreiben ist. Diese Gleichung ist vom $14n-30^{\text{sten}}$ Grade; und es scheint nicht möglich, den Grad der Gleichung noch weiter zu erniedrigen, um die willkürlichen Constanten c vollends zu beseitigen. Es dürfte daher auch unmöglich sein, die fraglichen Punkte als vollständige Schnittpunktensysteme dreier Oberflächen darzustellen.

8.

Für die Oberflächen der dritten Ordnung erhält man aus den obigen Sätzen einige bekannte Resultate. Da jede gerade Linie, welche mit der Oberfläche dritter Ordnung vier Punkte gemein hat, nothwendig ganz in derselben liegt, so mufs die Curve der vierpunktigen Berührungen nothwendig in gerade Linien zerfallen. Und da F hier vom neunten Grade wird, so ist die Anzahl der entstehenden Linien 27. Die Oberfläche $F=0$ kann in Bezug auf dieses Problem genau ebenso verwandt werden wie die Oberfläche $R=0$, welche Herr *Schläfli* zu diesem Zwecke betrachtet hat, und welche, im Allgemeinen von viel höherem Grade, die aus doppelt berührenden Ebenen gebildete abwickelbare Fläche darstellt, für die Oberflächen dritter Ordnung aber gleichfalls durch jene 27 Geraden hindurchgeht.

Die Punkte, in welchen diese geraden Linien die Curve der Wendepunkte berühren, und deren Anzahl nach §. 6 $2n(n-2)(11n-24)=54$ ist, hat Herr *Steiner* Asymptotenpunkte genannt, und viele merkwürdige Eigenschaften derselben entwickelt.

Ich bemerke hier nur noch ein Resultat, welches von analytischem Interesse sein kann. Bezeichnet man die Oberfläche F, insofern sie einer Oberfläche u entspricht, durch $F(u)$, und sind a, b zwei Functionen, welche den Ausdruck

$$au+bF(u)$$

homogen machen, so stellt dies, gleich Null gesetzt, eine Oberfläche dar, welche

durch die 27 Geraden von u hindurchgeht. Bildet man jetzt die Gleichung

$$F(au+bF(u)) = 0,$$

so mufs die hierdurch dargestellte Oberfläche nothwendig ebenfalls durch jene Geraden hindurchgehen, d. h. *es mufs identisch*

$$F(au+bF(u)) = \alpha u+\beta F(u)$$

sein, wo α, β *zwei von* a, b *abhängige Functionen bezeichnen,* ein Satz, welcher mit dem Fundamentaltheorem in der Theorie der Curven dritter Ordnung eine merkwürdige Analogie zeigt.

Carlsruhe, den 11ten März 1860.

Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

Herr *Steiner* hat im 53sten Bande dieses Journals, p. 139 eine Reihe von Sätzen angegeben, welche sich auf die von ihm Kernfläche der Oberfläche dritter Ordnung genannte Fläche beziehen. Diese Kernfläche ist, wie man leicht erkennt, nichts Anderes als die *Hesse*sche Determinante; und unter diesem Gesichtspunkt zeigt es sich, dafs die gedachten Sätze der Ausdruck für die algebraische Transformation einer homogenen Function dritter Ordnung mit vier Veränderlichen in die Summe von fünf Cuben ist, wobei dann zugleich die Determinante eine überraschend einfache Gestalt gewinnt, und die angeführten Sätze von selbst sich ergeben. Wenn man ferner bemerkt, wie aus den *Steiner*schen Sätzen sich ergiebt, dafs jene Transformation nur auf eine einzige Weise geleistet werden kann, und dieselbe also nur auf eine Gleichung des fünften Grades zurückführen kann, so erhellt sogleich die innere Wichtigkeit dieses Transformationsproblems, auch gegenüber den schönen vielfach angestellten Betrachtungen über die geraden Linien auf der Oberfläche dritter Ordnung, deren entsprechende Transformation auf vielfache Weise geleistet werden kann, und von einer Gleichung des 27sten Grades abhängt. Ich werde zunächst den analytischen Weg angeben, der zu den *Steiner*schen Sätzen führen kann, und sodann die Bildung der Gleichung fünften Grades angeben, welche zugleich über die Invarianten der betrachteten Functionen einige merkwürdige Andeutungen giebt.

1.

Es sei $u=0$ die Gleichung einer Oberfläche dritter Ordnung, auf homogene Coordinaten bezogen. Sodann seien eben diese Coordinaten für einen Punkt der Oberfläche x_1, x_2, x_3, x_4, für einen beliebigen andern Punkt y_1, y_2, y_3, y_4. Legt man von dem Punkte y aus einen Berührungskegel an u, so ist die Bedingung dafür, dafs x auf der Berührungscurve liege, bekanntlich

$$(1.)\qquad \Sigma u_i y_i = 0,$$

durch die Indices von u immer Differentialquotienten nach den entsprechenden x bezeichnet. Die Gleichung (1.) stellt aber in Bezug auf x überhaupt eine Oberfläche zweiter Ordnung dar, die erste Polare des Punktes y. Damit diese Oberfläche ein Kegel sei, müssen die Differentialquotienten des Ausdrucks (1.) nach den x gleichzeitig verschwinden können, so dafs

$$(2.)\quad \begin{cases} u_{11}y_1+u_{12}y_2+u_{13}y_3+u_{14}y_4 = 0, \\ u_{21}y_1+u_{22}y_2+u_{23}y_3+u_{24}y_4 = 0, \\ u_{31}y_1+u_{32}y_2+u_{33}y_3+u_{34}y_4 = 0, \\ u_{41}y_1+u_{42}y_2+u_{43}y_3+u_{44}y_4 = 0. \end{cases}$$

Hierin bezeichnen dann die x die Coordinaten des Scheitels für diesen Kegel. Da man aber offenbar in den Gleichungen (2.) die y mit den x vertauschen kann, ohne dafs die Gleichungen sich ändern, so zeigt sich, dafs umgekehrt die erste Polare von x wieder ein Kegel sein mufs, dessen Scheitel in y liegt. Dieser Eigenschaft wegen hat Herr *Steiner* derartige Punkte y, x ***reciproke Pole*** genannt.

Aus (2.) folgt aber ohne Weiteres

$$(3.)\quad \Delta = \Sigma \pm u_{11}u_{22}u_{33}u_{44} = 0;$$

der Ort der reciproken Pole ist daher die *Hesse*sche Determinante, von Herrn *Steiner* Kernfläche genannt.

Bezeichnet man ferner durch U_{ik} die Unterdeterminanten von Δ, durch α_1, α_2, α_3, α_4 beliebige Gröfsen, so kann man die Auflösungen der Gleichungen (2.) in folgender Gestalt darstellen:

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1 = \alpha_1 U_{11}+\alpha_2 U_{12}+\alpha_3 U_{13}+\alpha_4 U_{14}, \\ y_2 = \alpha_1 U_{21}+\alpha_2 U_{22}+\alpha_3 U_{23}+\alpha_4 U_{24}, \\ y_3 = \alpha_1 U_{31}+\alpha_2 U_{32}+\alpha_3 U_{33}+\alpha_4 U_{34}, \\ y_4 = \alpha_1 U_{41}+\alpha_2 U_{42}+\alpha_3 U_{43}+\alpha_4 U_{44}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen begründen einen merkwürdigen Satz, welcher, wie ich glaube, neu ist. Man erhält nämlich daraus unmittelbar die Gleichung

$$\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h u_{ikh} y_i y_k y_h = \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h \Sigma_m \Sigma_n \Sigma_p u_{ikh} \alpha_m \alpha_n \alpha_p U_{im} U_{kn} U_{hp}.$$

Wegen der Gleichung $\Delta = 0$ ist aber

$$U_{kn} U_{hp} = U_{kh} U_{np},$$

und daher ist obiger Ausdruck auch gleich

$$\Sigma_n \Sigma_p \alpha_n \alpha_p U_{np} . \Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h \Sigma_m u_{ikh} \alpha_m U_{im} U_{kh}.$$

Bezeichnet man endlich noch durch Δ_i den Differentialquotienten von Δ nach x_i, so ist noch

$$\Sigma_k \Sigma_h U_{kh} u_{ikh} = \Delta_i,$$

und demnach stellt sich die obige Gleichung in der folgenden Form dar:

$$\Sigma_i \Sigma_k \Sigma_h u_{ikh} y_i y_k y_h = \Sigma_n \Sigma_p \alpha_n \alpha_p U_{np} . \Sigma_i \Sigma_m \alpha_m \Delta_i U_{mi}.$$

Betrachtet man jetzt den besondern Fall, wo die linke Seite verschwindet, also wo y in der Oberfläche $u=0$ liegt, so mufs auch die rechte Seite verschwinden. Der erste Factor rechts aber, welcher gleich

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4$$

ist, kann offenbar immer durch passende Wahl der α so eingerichtet werden, dafs er nicht verschwindet. Daher bleibt nur der zweite Factor übrig, und es mufs also

$$\Sigma_i \Sigma_m \alpha_m \Delta_i U_{mi} = 0$$

sein. Ich habe in der vorangehenden Abhandlung bewiesen, dafs dies die Gleichung einer Oberfläche ist, welche durch die Berührungscurve von $\Delta=0$ und $F=0$ hindurchgeht, durch $F=0$ die im gedachten Aufsatz entwickelte Oberfläche bezeichnet, welche $u=0$ in den Orten der vierpunktigen Berührung schneidet. Man hat daher das Theorem:

Wenn von den reciproken Polen der eine in der Wendecurve ($\Delta=0$, $u=0$) *liegt, so liegt der andre auf der Berührungscurve von* $\Delta=0$ *mit* $F=0$; *und umgekehrt.*

Die Beziehung dieser beiden Curven, dafs sie einander berühren, wo sie sich treffen, habe ich a. a. O. bereits entwickelt. Hier zeigt sich ein neuer Zusammenhang; und den obigen Beweis und Satz kann man ohne Weiteres auch für algebraische Flächen beliebiger Ordnung folgendermafsen ausdrücken:

Wenn die erste Polare ein Kegel werden soll, so mufs die Spitze desselben auf der Determinantenfläche liegen, der Pol aber auf einer andern Fläche, welche durch Elimination der x aus den Gleichungen (2.) *erhalten wird. Liegt sodann der Pol insbesondere auch auf der Fläche* $u=0$, *so liegt die Spitze des Polarkegels in der Berührungscurve von* $\Delta=0$, $F=0$.

In Bezug auf die Oberflächen dritter Ordnung aber folgt ferner, dafs, wenn ein Pol im Schnitt von $u=0$, $\Delta=0$, $F=0$ liegt, also einer der 54 Berührungspunkte der Curven $u=0$, $\Delta=0$, und $u=0$, $F=0$ wird, nothwendig der reciproke Pol ebenfalls einer jener 54 Punkte sein mufs; oder,

nach dem von Herrn *Steiner* eingeführten Ausdruck, dafs die Asymptotenpunkte paarweise reciproke Pole sind; ein Satz, welchen Herr *Steiner* a. a. O. gegeben hat, und auf welchen ich weiter unten Gelegenheit haben werde zurückzukommen.

Sodann aber sind diejenigen reciproken Pole vorzugsweise von Bedeutung, für welche die Ausdrücke der y in (4.) unbestimmt werden. Die Gleichungen

$$U_{ik} = 0$$

können nämlich sämmtlich mit einander bestehen, indem, wie Herr *Steiner* angiebt, zehn solche Pole existiren, deren reciproke Pole sich in zehn gerade Linien ausbreiten. Auf diesen Umstand beziehen sich die folgenden Transformationen.

2.

Bezeichnet man durch $a_{ilk} = \frac{1}{6} u_{ilk}$ den Coefficienten von $x_i x_l x_k$ in u, so kann man immer u in der Form darstellen:

$$(5.)\qquad u = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ilk} x_i x_l x_k = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + A_4^3 + A_5^3,$$

wo die linearen Ausdrücke

$$(6.)\qquad A_i = \alpha_{1i} x_1 + \alpha_{2i} x_2 + \alpha_{3i} x_3 + \alpha_{4i} x_4$$

in geeigneter Weise zu bestimmen sind. In der That ist zur Ausführung dieser Bestimmung die gehörige Zahl von willkürlichen Constanten α vorhanden. Ich werde zunächst zeigen, dafs die Transformation nur auf eine einzige Weise geschehen kann. Zu diesem Ende mufs ich die Determinante und die Unterdeterminanten derselben für die transformirte Function u bilden. Um die Bildung zu erleichtern, mag folgendes Lemma vorausgeschickt werden:

Sind $z_1, z_2, \dots z_{n+1}$ lineare Functionen von $x_1, x_2, \dots x_n$, so dafs

$$z_i = \alpha_{1i} x_1 + \alpha_{2i} x_2 + \dots + \alpha_{ni} x_n;$$

und ist demnach identisch

$$f(z_1, z_2, \dots z_{n+1}) = \varphi(x_1, x_2, \dots x_n),$$

so ist auch identisch, wenn $f_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_k}$, $\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$ *gesetzt wird:*

$$(7.)\qquad -\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & \dots f_{1,n+1} & k_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \dots f_{2,n+1} & k_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n+1,1} & f_{n+1,2} & f_{n+1,3} & \dots f_{n+1,n+1} & k_{n+1} \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots k_{n+1} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

wo die k die n+1 Determinanten bezeichnen, welche aus den n+1 Coefficientenreihen α zusammengesetzt werden können, und welche die Gleichung erfüllen

$$(8.)\qquad k_1 z_1 + k_2 z_2 + \cdots + k_{n+1} z_{n+1} = 0.$$

Die Gleichung (7.) ist leicht einzusehen, denn es ist offenbar

$$\varphi_{ik} = \Sigma\Sigma f_{mn}\alpha_{im}\alpha_{kn}.$$

Nach einem bekannten Satz ist also die Determinante der φ_{ik} gleich

$$\Sigma\Sigma F_{mn}k_m k_n,$$

wo die F_{mn} die Unterdeterminanten des Systems der f_{mn} darstellen. Diese Form ist aber nur eine andere Schreibart für die linke Seite der Gleichung (7.).

Dies vorausgeschickt, ist augenblicklich

$$(8^a.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix} = -6^4 \cdot \begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & k_5 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 \end{vmatrix},$$

wenn man die A an die Stelle der z treten läfst, und daher die identische Gleichung festsetzt

$$(9.)\qquad 0 = k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 + k_5A_5 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & A_1 \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & A_2 \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & A_3 \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & A_4 \\ \alpha_{15} & \alpha_{25} & \alpha_{35} & \alpha_{45} & A_5 \end{vmatrix}.$$

Die obige Form zeigt aber dann leicht die ausgerechnete Gestalt:

$$(10.)\qquad \frac{\Delta}{6^4} = k_1^2A_2A_3A_4A_5 + k_2^2A_3A_4A_5A_1 + k_3^2A_4A_5A_1A_2 + \cdots$$

Um auf gleiche Weise die Unterdeterminanten von Δ zu bilden, betrachte ich die Function

$$u + \lambda(\beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_4x_4).$$

Die Determinante dieser Function in Bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4, λ ist

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \beta_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \beta_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \beta_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \beta_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 \end{vmatrix} = -\Sigma\Sigma U_{ik}\beta_i\beta_k,$$



so dafs also die Coefficienten der $\beta_i\beta_h$ die Unterdeterminanten angeben. Betrachte ich jetzt in dem Lemma als die beiden Reihen von Veränderlichen die Gröfsen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \lambda \quad \text{und} \quad A_1,\ A_2,\ \dots\ \lambda,$$

so findet sich

$$(11.)\qquad \Sigma\Sigma U_{ih}\beta_i\beta_h = 6^3.\begin{vmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & \gamma_1 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & k_3 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & k_4 & \gamma_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & k_5 & \gamma_5 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 & \gamma_5 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

durch $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots$ irgend ein System von Constanten bezeichnet, welches der Gleichung

$$(12.)\qquad \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \cdots$$

identisch Genüge leistet. Dieses System ist nicht ganz bestimmt; die Unterschiede verschiedener Systeme sind aber den k proportional, was bei der Form der rechten Seite von (11.) ohne Einflufs bleibt. Da ferner die β ganz beliebige Gröfsen bezeichneten, so kann auch ein solches System der γ ganz beliebig gewählt werden.

Die Ausführung der Determinante (11.) liefert dann die Form:

$$(13.)\qquad \Sigma\Sigma U_{ih}\beta_i\beta_h = 6^3(\gamma_1 k_2 - \gamma_2 k_1)^2 A_3 A_4 A_5 + \cdots,$$

wo nur ein Ausdruck als Repräsentant von zehn ähnlichen Ausdrücken hingeschrieben ist.

Diese Form zusammen mit (10.) zeigt nun aber,

1. *dafs die zehn Schnittlinien der Ebenen*

   $$A_1 = 0,\quad A_2 = 0,\quad \dots\quad A_5 = 0$$

   ganz in der Fläche $\Delta = 0$ liegen, da bei dem Verschwinden von je zweien derselben auch Δ verschwindet,

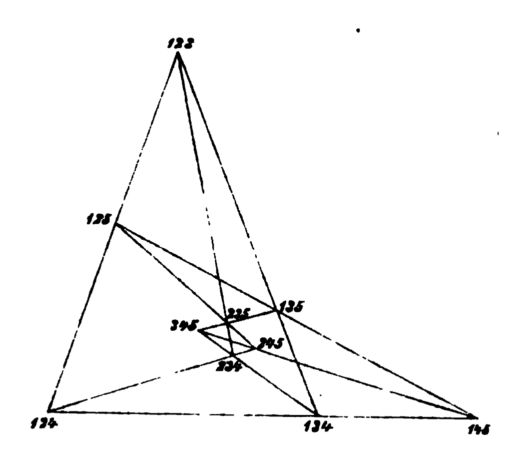
2. *dafs für die zehn Schnittpunkte je dreier dieser Ebenen nicht blos Δ, sondern auch sämmtliche Unterdeterminanten verschwinden, da der Ausdruck* (13.) *dann identisch zu Null wird.*

Endlich folgt aber auch, dafs eben dies für keine andern Ebenen möglich ist. Denn da in (13.) die Coefficienten aller Producte zweier γ ver-

schwinden müssen, so sieht man, dafs nothwendig die zehn Producte

$$A_1 A_2 A_3, \text{ etc.}$$

gleichzeitig für die betreffenden Punkte gleich Null sein müssen; was wieder nur möglich ist, wenn drei der A gleichzeitig verschwinden. Es giebt also wirklich nur fünf Ebenen A, welchen die Eigenschaft zukommt, dafs ihre Schnittlinien ganz in Δ liegen, und dafs ihre Schnittpunkte auch die Unterdeterminanten zu Null machen. Hierdurch ist einerseits bewiesen, dafs die obige Transformation nur auf eine Weise geleistet werden kann. Andrerseits aber enthält das Obige den analytischen Beweis für die *Steiner*schen Sätze über das Pentaeder der Ebenen A. Die Schnittpunkte der Ebenen sind solche Pole, deren reciproke sich in gerade Linien auflösen; sie sind zugleich Knotenpunkte von Δ, weil aufser Δ auch die Δ_i, als lineare Functionen der U_{ik}, verschwinden. Durch jeden Pol gehen drei der entsprechenden Geraden; auf jeder Geraden liegen drei der entsprechenden Pole. Diese Verhältnisse werden in der beistehenden Figur anschaulich, in welcher die fünf Ebenen durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ihre Schnittpunkte durch 123, etc. bezeichnet, und nur diejenigen zehn Linien gezogen sind, welche der Oberfläche Δ angehören.



Man kann diesen Betrachtungen andre hinzufügen, welche mit den Covarianten von u in Zusammenhang stehen. Von diesen habe ich aufser Δ zwei andere betrachtet, welche durch die Gleichungen

$$(14.) \quad \begin{cases} \Theta = \Sigma\Sigma U_{ik} \Delta_i \Delta_k, \\ T = \Sigma\Sigma U_{ik} \Delta_{ik} \end{cases}$$

gegeben sind; und aus denen sich die Function

$$(15.) \quad F = \Theta - 4\Delta T$$

zusammensetzt, welche gleich Null gesetzt, durch ihren Schnitt mit $u = 0$ die Orte der vierpunktigen Berührungen liefert. Diese beiden Covarianten sollen nunmehr gebildet werden. Zunächst entsteht Θ, wenn man in (13.) die β_i durch die Δ_i ersetzt; oder, was dasselbe ist, wenn man für die γ_i die

Differentialquotienten

$$(16.)\quad \gamma_i = \frac{\partial \varDelta}{\partial A_i} = \nabla_i$$

einführt. Dadurch erhält man für Θ die Form:

$$(17.)\quad \Theta = 6^3(k_1\nabla_2 - k_2\nabla_1)^2 A_3 A_4 A_5 + \cdots,$$

wo nur ein Term statt zehn ähnlicher hingeschrieben ist; und wo

$$(18.)\quad \nabla_1 = 6^4(k_2^2 A_3 A_4 A_5 + k_3^2 A_4 A_5 A_2 + k_4^2 A_5 A_2 A_3 + k_5^2 A_2 A_3 A_4),$$

u. s. w.

Der Ausdruck von T findet sich leicht, wenn man bemerkt, dafs T der Coefficient von λ in der Determinante von $u + \lambda\varDelta$ ist. Bezeichnet man daher durch ∇_{ik} den Ausdruck

$$\nabla_{ik} = \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial A_i \partial A_k},$$

wo dann

$$(19.)\quad \nabla_{11} = \nabla_{22} \cdots = 0,\quad \nabla_{12} = 6^4(k_3^2 A_4 A_5 + k_4^2 A_5 A_3 + k_5^2 A_3 A_4),\ \text{u. s. w.};$$

so erhält man aus (8^a.) sehr leicht die Gestalt:

$$(20.)\quad T = -6^3.2(A_1 A_2 A_3 k_4 k_5 \nabla_{45} + \cdots),$$

wo ein Term als Repräsentant von zehn verschiedenen hingeschrieben ist.

Betrachtet man jetzt einen Punkt, der von dem Schnittpunkt der Ebenen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ unendlich wenig entfernt ist, so dafs die Ausdrücke A_1, A_2, A_3 unendlich klein von der ersten Ordnung werden. Dann wird auch T unendlich klein von der ersten Ordnung, $\varDelta$ von der zweiten und Θ von der dritten. Die Oberfläche $T = 0$ geht daher einfach durch den betrachteten Punkt, indem, beiläufig bemerkt, ihre Tangentenebene durch den Schnitt von A_4 und A_5 geht; die Oberfläche $\varDelta = 0$ hat in eben diesem Punkte einen Knotenpunkt, welcher sich einem Kegel der zweiten Ordnung anschliefst; die Oberflächen $\Theta = 0$ und $F = 0$ aber haben, indem sie durch denselben Punkt gehen, Knotenpunkte, welche sich Kegeln der dritten Ordnung anschliefsen. Man kann also den Satz aussprechen:

In den zehn Ecken des Pentaeders schneiden sich die Oberflächen $T=0$, $\varDelta=0$, $\Theta=0$, $F=0$; und zwar sind diese Ecken für $\varDelta$ Knotenpunkte, wo sich die Oberfläche einem Kegel der zweiten Ordnung, für Θ und F aber solche, wo sich diese Flächen Kegeln der dritten Ordnung anschliefsen.

Da ferner, wie ich gezeigt habe, die Oberflächen $F=0$, $\varDelta=0$ oder $\Theta=0$, $\varDelta=0$ sich längs einer Curve berühren, so folgt, ***dafs in eben diesen***

zehn Punkten der Berührungskegel von Δ jeden der Berührungskegel von Θ und F in drei verschiedenen Seiten berühren mufs, wovon man sich auch leicht direct überzeugt. Und endlich also, ***dafs für die Berührungscurve von Δ mit F oder mit Θ jede Ecke des Pentaeders ein dreifacher Punkt ist.***

3.

Mit Hülfe der Invariantentheorie ist es nun möglich, die Gleichung fünften Grades wirklich aufzustellen, von welcher die Transformation (5.) abhängt. Die Hauptzüge einer solchen Theorie sind in der Abhandlung des Herrn ***Aronhold*** „über die homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen" (dieses Journal Bd. 55, p. 97) implicite enthalten; und ich mufs zum bessern Verständnifs des Folgenden einige Betrachtungen allgemeiner Natur vorausschicken, auf welche mich ein sorgfältiges Studium jener Abhandlung geführt hat, und welche, wie ich glaube, mit zu den Quellen gehören, aus welchen die schönen Untersuchungen des Herrn ***Aronhold*** geflossen sind.

Es sei F irgend eine ganze und rationale Grundform einer homogenen Function f von beliebig hohem Grade mit beliebig vielen Veränderlichen; wobei es ganz gleichgültig ist, ob F eine Invariante, Covariante, zugehörige Form oder Zwischenform ist. Ist dann a ein Coefficient von f, b der entsprechende einer ähnlichen Function φ, so ist offenbar

$$\Sigma b \frac{\partial F}{\partial a},$$

die Summe über alle Coefficienten ausgedehnt, simultane Grundform von f und φ; und sie geht, wenn jedes b dem entsprechenden a gleichgesetzt wird, in F über, multiplicirt mit einer reinen Zahl.

Setzt man dies Verfahren fort, indem man immer nach den a differentiirt und als Incremente die Coefficienten einer neuen Function von derselben Ordnung und Anzahl der Veränderlichen einführt, so erhält man zuletzt eine simultane Grundform für μ Functionen von gleicher Ordnung und gleich viel Veränderlichen, welche, wenn μ gleich dem Grade von F in Bezug auf die a ist, in Bezug auf die Coefficienten sämmtlicher Functionen linear ist, und aufserdem die Eigenschaft besitzt, in F, multiplicirt mit einem Zahlenfactor, überzugehen, sobald man die μ Functionen sämmtlich in f übergehen läfst.

Für diese μ Functionen darf man aber ohne Zweifel, wenn n der Grad von f ist, die n^{ten} Potenzen von ebensoviel linearen Ausdrücken

$$B = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots$$

setzen; und bildet man dann die simultane Grundform $[F]$ für diese n^{ten} Potenzen, so erhält man daraus F durch eine symbolische Substitution, wenn man die Producte von n der b durch den entsprechenden Coefficienten a ersetzt.

Die Grundform $[F]$ ist offenbar zugleich simultane Grundform für die μ linearen Ausdrücke B selbst. Wendet man nun auf eine solche Grundform die nämlichen Betrachtungen an, wie oben auf F, so zeigt es sich, dafs $[F]$ nothwendig auf rationale Weise aus solchen Grundformen der B zusammengesetzt sein mufs, welche in Beziehung auf die einzelnen b linear sind.

Solcher Grundformen giebt es inzwischen, wie die unmittelbare Betrachtung lehrt, nur vier Arten: *Covarianten,* welches die B selbst sind; eine *Zwischenform,* nämlich

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots;$$

Invarianten, welche die aus den verschiedenen B zu bildenden Determinanten

$$\Sigma \pm b_1 b'_2 b''_3 \ldots$$

sind; *zugehörige Formen,* welche aus den letztern entstehen, sobald eine Reihe der b durch die Veränderlichen u ersetzt wird.

Und dies führt ohne Weiteres zu dem Fundamentaltheorem:

Jede rationale und ganze Grundform wird erhalten, wenn man Aggregate der Producte der obigen vier Gestalten bildet, so dafs aber in jedem Producte jede Art der b n mal erscheint; und wenn man sodann für die Producte gleichartiger b die entsprechenden Coefficienten a einführt.

4.

Wendet man dies Theorem insbesondere auf die Invarianten der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen an, so zeigt sich, dafs, wenn man die linearen Ausdrücke

$$\begin{aligned} &a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots \\ &b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots \\ &c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

betrachtet, sämmtliche Invarianten unter das Schema

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 \Sigma \pm e_1 f_2 g_3 h_4 \ldots$$

fallen, wo jede Reihe a, b, c etc. dreimal erscheinen mufs, und wo durch eine symbolische Substitution

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h = \cdots = a_{ikh}$$

zu setzen ist; oder dafs wenigstens alle ganzen und rationalen Invarianten sich

aus Invarianten dieser Art auf rationale Weise zusammensetzen. Und die Anzahl der mit einander multiplicirten Determinanten mufs dann offenbar, weil jedes a, b, ... dreimal vorkommen mufs, eine der Zahlen 3, 6, 9, ... sein, wodurch man die Invarianten der Ordnungen 4, 8, 12, ... in Bezug auf a erhalten würde. Ich werde jetzt zeigen, dafs es keine Invarianten der Ordnungen 4, 12, etc. geben kann, und dafs sich überhaupt alle aus fünf Invarianten, welche einzeln von den Ordnungen 8, 16, 24, 32, 40 sind, auf rationale Weise zusammensetzen.

Zu diesem Zweck betrachte ich die transformirte Form

$$u = A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + A_4^3 + A_5^3,$$

in welcher zwischen den A die Relation (9.)

$$0 = k_1 A_1 + k_2 A_2 + k_3 A_3 + k_4 A_4 + k_5 A_5$$

besteht. Man bemerkt, dafs jede Invariante von u sich zugleich als simultane Invariante der A darstellen mufs. Nach dem Obigen ist sie also eine ganze rationale Function der aus den A zu bildenden Determinanten; oder da dies eben die k sind, *so ist jede rationale ganze Invariante von u eine rationale ganze Function der k.*

Aber u ändert sich nicht, wenn man jedem System der Coefficienten α eine dritte Wurzel der Einheit als Factor hinzufügt. Durch passende Wahl derselben kann man es erreichen, dafs nur eines der k zugleich eine dritte Wurzel der Einheit als Factor enthält, während die übrigen unverändert bleiben. In den Invarianten können also nur die dritten Potenzen der k erscheinen. Da ferner auch durch Vertauschung der A die Invariante sich nicht ändern darf, so sieht man, dafs sie eine symmetrische Function der k^2 sein mufs. Und so kann man endlich den Satz aufstellen:

Jede ganze rationale Invariante von u ist eine symmetrische Function der sechsten Potenzen der k.

Die sechste Potenz der k entspricht aber der achten Ordnung der Invarianten in Bezug auf die a. *Die Ordnungen der Invarianten sind also sämmtlich durch 8 theilbar.*

Denkt man sich nun je eine Invariante der Ordnungen 8, 16, 24, 32, 40, so wird man aus ihnen die fünf symmetrischen Grundfunctionen der k successive bestimmen können. Gäbe es von einer dieser Ordnungen noch eine zweite Invariante, so könnte man aus ihr und den Invarianten von gleichem und niederem Grade die k eliminiren, d. h. sie durch jene ausdrücken. Ebenso kann man jede höhere Invariante durch die symmetrischen Grundfunctionen der k, also auch durch jene fünf Invarianten rational darstellen.

So ist es also bewiesen, ***dafs es wesentlich nur je eine Invariante der Ordnungen 8, 16, 24, 32, 40 geben kann, und dafs sich alle übrigen aus diesen zusammensetzen.***

5.

Solche fünf Invarianten können ohne Mühe gebildet werden. Bezeichnet man durch

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$$

die Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$, so erhält man als Schemata der gesuchten Invarianten durch eine leichte Combination die folgenden:

1) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b \\ c' \\ d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c \\ d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d \end{vmatrix}$$

2) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \\ d'' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a''' \\ b''' \\ c''' \\ d''' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a \\ a' \\ a'' \\ a''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ b'' \\ b''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ c'' \\ c''' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ d''' \end{vmatrix}$$

3) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k' \\ l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a \\ a' \\ u \\ u' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ v \\ v' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ k \\ k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ l \\ l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m \\ m' \\ w \\ w' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n \\ n' \\ r \\ r' \end{vmatrix}$$

4) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \\ d'' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u'' \\ v'' \\ w'' \\ r'' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k' \\ l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix}^2$$
$$\times \begin{vmatrix} a \\ a' \\ a'' \\ k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ b'' \\ l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ c'' \\ m' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ d'' \\ n' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u \\ u' \\ u'' \\ k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w \\ w' \\ w'' \\ m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \\ r' \\ r'' \\ n \end{vmatrix}$$

5) $$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \\ r \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k \\ l \\ m \\ n \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} k' \\ l' \\ m' \\ n' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} e' \\ f' \\ g' \\ h' \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{vmatrix}^2$$
$$\times \begin{vmatrix} a \\ a' \\ e \\ e' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b \\ b' \\ f \\ f' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c \\ c' \\ k \\ k' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d \\ d' \\ l \\ l' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u \\ u' \\ g \\ g' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v \\ v' \\ h \\ h' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} w \\ w' \\ x \\ x' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \\ r' \\ y \\ y' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} m \\ m' \\ z \\ z' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} n \\ n' \\ t \\ t' \end{vmatrix}.$$

Diese Formen sind zum Theil so verwickelt, dafs sie ihr wahres Bildungsgesetz nicht erkennen lassen; und sie sind in der That nicht in dieser Gestalt unmittelbar gebildet, sondern durch Einführung der Coefficienten von $\varDelta$. Da man sich nämlich leicht überzeugt, dafs die Determinante $\varDelta$ die symbolische Gestalt annimmt:

$$\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}^2 \cdot (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots)(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots)(d_1 x_1 + d_2 x_2 + \cdots),$$

wo nach der Ausrechnung $a_i a_k a_h$, etc. $= a_{ikh}$ zu setzen ist, und wo nur ein Zahlenfactor ausgelassen ist; so lassen sich die obigen Formen, abgesehen von Zahlenfactoren, einfach darstellen, wenn man zu der symbolischen Substitution $a_i a_k a_h = b_i b_k b_h \cdots = a_{ikh}$ noch die andere:

$$\alpha_i \alpha_k \alpha_h \alpha_m = \beta_i \beta_k \beta_h \beta_m, \text{ etc.}$$

gleich dem entsprechenden Coefficienten von $\varDelta$, hinzufügt. Auf diese Weise erhält man die Formen:

$$1)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ c \\ d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ b \\ d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ a \\ b \\ c \end{vmatrix}$$

$$2)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^4$$

$$3)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{vmatrix}^2$$

$$4)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \zeta \\ \eta \\ \vartheta \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \zeta \\ \eta \\ \vartheta \\ \varepsilon \end{vmatrix}^2$$

$$5)\quad \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varepsilon \\ \zeta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \eta \\ \vartheta \\ \gamma \\ \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \eta \\ \vartheta \\ \iota \\ \varkappa \end{vmatrix}^2 \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon \\ \zeta \\ \iota \\ \varkappa \end{vmatrix}^2,$$

welche auf einfache und gesetzmäfsige Weise gebildet sind, und aus welchen durch Auflösung rückwärts die ersten Formen entstanden. Man bemerkt, dafs

die drei letzten reine Invarianten von Δ sind; sie sind zugleich die einfachsten Invarianten, welche einer homogenen Function vierter Ordnung mit vier Veränderlichen zukommen.

Bezeichnet man nun die Combinationssummen der sechsten Potenzen von $k_1, k_2, \dots k_5$ durch $C_1, C_2, \dots C_5$, so dafs die k Wurzeln der Gleichung

$$(21.)\qquad k^{30}-C_1k^{24}+C_2k^{18}-C_3k^{12}+C_4k^6-C_5 = 0$$

sind, und bezeichnet man die fünf Invarianten in der ersten Gestalt durch $J_1, J_2, \dots J_5$, so müssen diese nach dem Obigen offenbar folgende Gestalt annehmen:

$$(22.)\quad \begin{cases} J_1 = \varrho_1 C_1, \\ J_2 = \varrho_2 C_2 + \varrho_2' C_1^2, \\ J_3 = \varrho_3 C_3 + \varrho_3' C_2 C_1 + \varrho_3'' C_1^3, \\ J_4 = \varrho_4 C_4 + \varrho_4' C_3 C_1 + \varrho_4'' C_2^2 + \varrho_4^{(3)} C_2 C_1^2 + \varrho_4^{(4)} C_1^4, \\ J_5 = \varrho_5 C_5 + \varrho_5' C_4 C_1 + \varrho_5'' C_3 C_2 + \varrho_5^{(3)} C_3 C_1^2 + \varrho_5^{(4)} C_2 C_1^3 + \varrho_5^{(5)} C_1^5, \end{cases}$$

wo die ϱ rationale Zahlen bedeuten. Dafs ein derartiges Resultat wirklich erscheint, kann man aus der ersten Form der Invarianten auch unmittelbar ersehen, wenn man die wirkliche Bildung versucht. Denn da nach ausgeführter Rechnung in denselben die symbolische Substitution

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h' = \dots = a_{ikh}$$

auszuführen ist, welche, wenn man auf die transformirte Gestalt zurückgeht, den Ausdruck annimmt:

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h = \dots = \alpha_{i1}\alpha_{k1}\alpha_{h1} + \alpha_{i2}\alpha_{k2}\alpha_{h2} + \dots,$$

so erkennt man unmittelbar, dafs jede der Invarianten sich in eine Summe von Producten wirklicher Determinanten auflöst, welche einzeln aus je vier Reihen der α zu bilden sind, d. h. in eine Summe von Producten der k. Ja man kann sogar die erste Form der Invarianten von vorn herein in eine solche Gestalt bringen, dafs die k darin abgesondert erscheinen, und die symbolischen Substitutionen nur noch Zahlenwerthe liefern. Denn drückt man die linearen Ausdrücke $a_1x_1+a_2x_2+\cdots$ etc. durch die A aus, so dafs sie die Gestalt annehmen

$$p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3+\cdots \text{ etc.},$$

so hat man demnach

$$a_i = p_1\alpha_{i1}+p_2\alpha_{i2}+\dots+p_5\alpha_{i5},$$
$$b_i = q_1\alpha_{i1}+q_2\alpha_{i2}+\dots+q_5\alpha_{i5},$$
$$\text{etc.}$$

und die symbolische Determinante $\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix}$ geht dann über in:

$$\Sigma \pm p_1 q_2 r_3 s_4 k_4;$$

so dafs die Invarianten sich als Producte von Determinanten fünfter Ordnung darstellen, welche in Bezug auf die k linear sind. Da aber sodann

$$(p_1 A_1 + p_2 A_2 + \cdots)^3 = u$$

sein soll, so hat man die symbolischen Substitutionen

$$p_i p_k p_h = q_i q_k q_h \cdots = 1 \text{ oder } = 0,$$

jenachdem i, k, h sämmtlich gleich, oder einige derselben verschieden sind. Diese Substitutionen bewegen sich dann also nur noch in numerischen Werthen. Eine solche Darstellung giebt dann z. B.

$$\varrho_1 = 120;$$

es scheint aber als wenn die Bestimmung der übrigen ϱ auf erhebliche Schwierigkeiten führe.

Löst man nun die Gleichungen (22.) nach den C auf, so dafs

$$\text{(23.)} \quad \begin{cases} C_1 = \sigma_1 J_1, \\ C_2 = \sigma_2 J_2 + \sigma_2' J_1^2, \\ C_3 = \sigma_3 J_3 + \sigma_3' J_2 J_1 + \sigma_3'' J_1^3, \\ C_4 = \sigma_4 J_4 + \sigma_4' J_3 J_1 + \sigma_4'' J_2^2 + \sigma_4^{(3)} J_2 J_1^2 + \sigma_4^{(4)} J_1^4, \\ C_5 = \sigma_5 J_5 + \sigma_5' J_4 J_1 + \sigma_5'' J_3 J_2 + \sigma_5^{(3)} J_3 J_1^2 + \sigma_5^{(4)} J_2 J_1^3 + \sigma_5^{(5)} J_1^5, \end{cases}$$

so erhält man die Coefficienten der gesuchten Gleichung fünften Grades durch die fünf Invarianten und durch rationale Zahlen ausgedrückt.

6.

Man kann diese Gleichung dazu benutzen, um besondere Fälle einer Oberfläche dritter Ordnung zu characterisiren. Soll z. B. insbesondere die Fläche eine Spitze darbieten, so müssen die Differentialquotienten von x sämmtlich gleichzeitig verschwinden können, d. h. es müssen die Gleichungen bestehn:

$$\text{(24.)} \quad \begin{cases} \alpha_{11} A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2 + \cdots = 0, \\ \alpha_{21} A_1^2 + \alpha_{22} A_2^2 + \cdots = 0, \\ \alpha_{31} A_1^2 + \alpha_{32} A_2^2 + \cdots = 0, \\ \alpha_{41} A_1^2 + \alpha_{42} A_2^2 + \cdots = 0. \end{cases}$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt dann, wenn μ eine beliebige Gröfse bedeutet:

$$(25.)\quad \begin{cases} A_1^2 = \mu k_1, \\ A_2^2 = \mu k_2, \\ \dots\dots \end{cases}$$

Führt man dies in die identische Gleichung

$$(26.)\quad k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots = 0$$

ein, so erhält man die Bedingung

$$(27.)\quad \sqrt{k_1^3} + \sqrt{k_2^3} + \sqrt{k_3^3} + \sqrt{k_4^3} + \sqrt{k_5^3} = 0.$$

Die Fortschaffung der Wurzeln giebt dann eine symmetrische Function der k^6, welche auf den 24sten Grad der k ansteigt. In Folge der Gleichungen (23.) hat dieselbe also die Form:

$$(28.)\quad \tau J_4 + \tau' J_3 J_1 + \tau'' J_2^2 + \tau^{(3)} J_2 J_1^2 + \tau^{(4)} J_1^4 = 0,$$

wo die τ reine Zahlen bedeuten.

Man sieht leicht, dafs in einer derartigen Spitze die Flächen $\Delta = 0$, $T = 0$, $\Theta = 0$, $F = 0$ ebenfalls Spitzen erhalten; und zwar schliefst sich die Spitze von Δ so wie die Spitze von u einem Kegel der zweiten Ordnung an.

Um die 27 Geraden der Oberfläche dritter Ordnung mit der obigen Transformation in Zusammenhang zu bringen, kann man zunächst die Asymptotenpunkte aufsuchen. Nach (2.) sind je zwei reciproke Pole mit einander durch Gleichungen verbunden, welche sich aus der transformirten Function in folgender Gestalt darstellen:

$$(29.)\quad \begin{cases} \alpha_{11} A_1 B_1 + \alpha_{12} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{15} A_5 B_5 = 0, \\ \alpha_{21} A_1 B_1 + \alpha_{22} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{25} A_5 B_5 = 0, \\ \alpha_{31} A_1 B_1 + \alpha_{32} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{35} A_5 B_5 = 0, \\ \alpha_{41} A_1 B_1 + \alpha_{42} A_2 B_2 + \cdots + \alpha_{45} A_5 B_5 = 0, \end{cases}$$

wo, nur der Kürze wegen, analog der Bedeutung von A_i, die Functionen

$$(30.)\quad B_i = \alpha_{1i} y_1 + \alpha_{2i} y_2 + \alpha_{3i} y_3 + \alpha_{4i} y_4$$

eingeführt sind. Die B stehen zu den y genau in derselben Beziehung, wie die A zu den x, und man kann zwei reciproke Pole durch die Buchstaben A, B andeuten. Durch Auflösung des Systems (29.) aber ergiebt sich:

$$(31.)\quad \begin{cases} A_1 B_1 = \lambda k_1, \\ A_2 B_2 = \lambda k_2, \\ \dots\dots\dots \\ A_5 B_5 = \lambda k_5, \end{cases}$$

durch λ einen willkürlichen Factor bezeichnet. Fügt man jetzt die Bedingung hinzu, dafs beide Pole auf der Oberfläche liegen, also Asymptotenpunkte sein sollen, so hat man die vier Gleichungen hinzuzufügen:

$$(32.)\quad \begin{cases} A_1^3+A_2^3+\cdots+A_5^3=0, & k_1A_1+k_2A_2+\cdots+k_5A_5=0, \\ B_1^3+B_2^3+\cdots+B_5^3=0, & k_1B_1+k_2B_2+\cdots+k_5B_5=0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (31.), (32.) genügen, um die Verhältnisse der A, B, λ zu bestimmen. Aber man sieht leicht, dafs man den letzten beiden Gleichungen (32.) mit Hülfe von (31.) auch die Gestalt geben kann:

$$A_1^2B_1+A_2^2B_2+\cdots+A_5^2B_5 = 0,$$
$$A_1B_1^2+A_2B_2^2+\cdots+A_5B_5^2 = 0;$$

und combinirt man dies mit den ersten beiden Gleichungen (32.), so folgt, dafs für jeden beliebigen Werth von ϱ

$$(A_1+\varrho B_1)^3+(A_2+\varrho B_2)^3+\cdots+(A_5+\varrho B_5)^3 = 0.$$

Da nun der Punkt $A+\varrho B$ ein beliebiger Punkt der Verbindungslinie von A, B ist, so mufs diese ganze Linie in der Oberfläche liegen, d. h. *je zwei Asymptotenpunkte, welche reciproke Pole sind, liegen auf einer der 27 Geraden der Oberfläche;* und umgekehrt kann man die 27 Geraden durch die 27 Punktenpaare A, B definiren.

Die wirkliche Aufstellung der Gleichung des 27sten Grades, von welcher die Auffindung der 27 Geraden abhängt, führt aber auf ein ganz anderes Problem, dessen Lösung sehr schwierig scheint. Die Theorie der Grundformen deutet darauf hin, dafs als unbekannte Gröfse der letzten Eliminationsgleichung von $p-1$ homogenen Gleichungen $f_1=0$, $f_2=0$, ... $f_{p-1}=0$ mit p Unbekannten eine absolute simultane Covariante der Functionen f_1, f_2, ... zu wählen ist, d. h. der Quotient zweier simultanen Covarianten gleich hoher Ordnung. Seien z. B. f_p und f_{p+1} solche Covarianten, bei welchen die gleiche Ordnung durch Potenzirung erreicht sein kann. Zwischen den $p+1$ Functionen f besteht dann eine Gleichung, welche von den Veränderlichen unabhängig ist, und nur noch die simultanen Invarianten enthält. Läfst man in dieser allgemeinen Beziehung dann f_1, f_2, ... verschwinden, so erhält man eine Gleichung für $\frac{f_p}{f_{p+1}}$, deren Coefficienten nur Functionen der simultanen Invarianten sind; und diese kann dann als die letzte Gleichung zur Bestimmung der Werthe der ursprünglichen Veränderlichen angesehen werden.

Wenn also die Asymptotenpunkte aus den Gleichungen $u=0$, $\Delta=0$, $\Theta=0$ erhalten werden, so hat man eine Beziehung zwischen diesen und

irgend zwei andern Covarianten aufzusuchen, um dann eine Gleichung des 54sten Grades zu erhalten, welche sich auf den 27sten zurückführen läfst. Will man dagegen die Schnittpunkte der 27 Geraden mit einer beliebigen Ebene

$$c = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots = 0$$

erhalten, so hat man eine Beziehung zwischen u, Θ, Δ, T, c aufzusuchen, welche mit Hülfe simultaner Invarianten von u und c, d. h. durch Invarianten und zugehörige Formen von u, hervorgebracht werden kann. Der hohe Grad der resultirenden Gleichung läfst umgekehrt einen Rückschlufs darauf thun, dafs der Zusammenhang solcher Covarianten nur ein sehr verwickelter sein könne.

Man könnte aber eine solche Bildung unmittelbar an der transformirten Form vornehmen, indem man die x eliminirte. Die ersterwähnte Aufgabe namentlich kann dann offenbar nur noch Coefficienten enthalten, welche aus den symmetrischen Functionen der k^6 auf rationale Weise zusammengesetzt sind; und da diese Functionen ihrerseits sich durch die Invarianten J darstellen, so würde sich auf diesem Wege die allgemeinste Form der letzten Gleichung ergeben.

Carlsruhe, den 26sten März 1860.

Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel.

(Von *C. W. Borchardt.*)

(Gelesen in der Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 25. Februar 1858.)

Einer sehr frühen Epoche in der Kenntnifs der elliptischen Integrale gehört das Ergebnifs an, dafs die Bestimmung des completen elliptischen Integrals erster Gattung

$$(1.)\quad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2\cos\varphi^2+n^2\sin\varphi^2}}$$

auf die Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels von m und n zurückkommt. Indem man die *Landen*sche oder die *Gaufs*sche Transformation zweiter Ordnung auf das complete Integral (1.) anwendet, findet man, dafs dasselbe unverändert bleibt, wenn man für m und n deren arithmetische und geometrische Mittel $m_1 = \frac{1}{2}(m+n)$, $n_1 = \sqrt{mn}$ setzt. Wiederholt man diese Operation unter Einführung der Bezeichnungen

$$m_2 = \tfrac{1}{2}(m_1+n_1),\quad n_2 = \sqrt{m_1 n_1},$$
$$m_3 = \tfrac{1}{2}(m_2+n_2),\quad n_3 = \sqrt{m_2 n_2},\quad \text{etc.}$$

so nähern sich die beiden Reihen von Gröfsen

$$m,\quad m_1,\quad m_2,\quad \dots$$
$$n,\quad n_1,\quad n_2,\quad \dots$$

derselben Grenze ω, d. h. dem arithmetisch-geometrischen Mittel von m und n nach *Gaufs*ens Bezeichnung, und der Werth des Integrals (1.) ergiebt sich

$$= \tfrac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{\omega}.$$

Die umgekehrte Aufgabe, von dem arithmetisch-geometrischen Mittel als dem Grenzwerth, auf welchen die wiederholte algebraische Operation führt, auszugehen und dessen Berechnung auf die Bestimmung des elliptischen Integrals zurückzuführen, bietet bedeutend gröfsere Schwierigkeiten dar, in so fern man hierbei die Transformation des elliptischen Integrals nicht voraussetzen darf, also durch andre Mittel zum Ziel gelangen mufs. Der hier folgende Aufsatz beschäftigt sich mit der Lösung dieser Aufgabe.

Das arithmetisch-geometrische Mittel ω von m und n sowie jede Function von ω hat der Definition nach die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn man für m und n deren arithmetisches und deren geometrisches Mittel setzt. Sie genügt also der Functionalgleichung

$$(2.)\qquad f(m,n) = f(\tfrac{1}{2}(m+n), \sqrt{mn}),$$

und umgekehrt ist jede Function f, welche dieser Gleichung genügt, eine blofse Function von ω, da man durch unendlich oft wiederholte Anwendung $f(m,n) = f(\omega,\omega)$ findet. Die Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels kommt also auf die Lösung obiger Functionalgleichung zurück.

Man sieht der Natur der hier zu lösenden Aufgabe nach voraus, dafs die gesuchte Function $f(m,n)$ einer partiellen Differentialgleichung genügen mufs. Eine weitere Ueberlegung zeigt, dafs diese partielle Differentialgleichung sich durch schickliche Wahl der Unbekannten auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen läfst. Wenn man $q.m$ und $q.n$ an die Stelle von m und n setzt, so geht zugleich ω in $q.\omega$ über; ω ist daher eine homogene Function erster Ordnung von m und n, mithin sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial\omega}{\partial m}$ und $\frac{\partial\omega}{\partial n}$ homogene Functionen der Ordnung Null von m und n, d. h. nur von dem Quotienten $\frac{n}{m}$ abhängig. Da überdies $f(m,n)$ eine blofse Function von ω ist, so hat man die Proportion:

$$\frac{\partial f}{\partial m}:\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial\omega}{\partial m}:\frac{\partial\omega}{\partial n}.$$

Der Quotient $\frac{\partial f}{\partial n}:\frac{\partial f}{\partial m}$ ist also für alle Functionen f ein und dieselbe Function von $\frac{n}{m}$, die von einer gewöhnlichen Differentialgleichung abhängt, während f einer partiellen Differentialgleichung genügt. Bezeichnet man mit μ und ν die partiellen Differentialquotienten von f nach m und n, so wird also $\frac{\nu}{\mu}$ die abhängige Variable, $\frac{n}{m}$ die unabhängige Variable der zu suchenden Differentialgleichung sein.

Anstatt nun die Quotienten $\frac{n}{m}$ und $\frac{\nu}{\mu}$ sogleich in die Rechnung einzuführen, thut man gut, die Homogeneität der Variablen beizubehalten. Man hat zwar dann anstatt *eines* Differentialquotienten, der nach $\frac{n}{m}$ genommen ist,

die beiden nach m und nach n genommenen zu betrachten, indessen hängen dieselben von einander ab. So hat man z. B. für den ersten Differentialquotienten von $\frac{\nu}{\mu}$

$$0 = m\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\nu}{\mu}\right) + n\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$$

oder nach Multiplication mit μ^2

$$0 = m\left\{\mu\frac{\partial\nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial m}\right\} + n\left\{\mu\frac{\partial\nu}{\partial n} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial n}\right\},$$

so dafs man anstatt des Differentialquotienten von $\frac{\nu}{\mu}$ nach $\frac{n}{m}$ einen Ausdruck, den ich mit l bezeichnen will, zu betrachten hat, welcher durch die Doppelgleichung zu definiren ist

$$(3.)\qquad l = m\left\{\mu\frac{\partial\nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial m}\right\} = -n\left\{\mu\frac{\partial\nu}{\partial n} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial n}\right\}.$$

Um die gesuchte Differentialgleichung zu erhalten, wird man folgendes Verfahren einzuschlagen haben:

Wenn man aus der gegebenen Functionalgleichung (2.):

$$f(m, n) = f(m_1, n_1),$$

wo $m_1 = \frac{1}{2}(m+n)$, $n_1 = \sqrt{mn}$, durch Differentiation neue Gleichungen ableitet, so findet man zwischen den Differentialquotienten von $f(m, n)$ und $f(m_1, n_1)$ Relationen, die weniger einfach sind als die zwischen den Functionen selbst bestehende, die aber doch gestatten, jeden Ausdruck, der m, n, $f(m, n)$ und seine Differentialquotienten nach m und n enthält, in einen andern zu transformiren, welcher aus m_1, n_1, $f(m_1, n_1)$ und dessen Differentialquotienten nach m_1 und n_1 zusammengesetzt ist.

Gelingt es nun, diesen Ausdruck so zu wählen, dafs der transformirte ebenso aus m_1, n_1 und $f(m_1, n_1)$ gebildet ist wie der ursprüngliche aus m, n und $f(m, n)$ oder dafs sie sich wenigstens nur durch einen von der unbekannten Function freien Factor von einander unterscheiden, so wird man durch einen unendlichen Progrefs zur Bestimmung dieses Ausdrucks gelangen, indem man denselben auf einen solchen zurückführt, in welchem m und n beide durch dieselbe Gröfse ω ersetzt sind. Diese Bestimmung wird also zu einer Relation zwischen m, n, $f(m, n)$ und den Differentialquotienten von f führen, d. h. zu der gesuchten Differentialgleichung. An dem vorliegenden Beispiel läfst sich das Verfahren folgendermafsen durchführen:

Bezeichnet man mit μ_1 und ν_1 die nach m_1 und n_1 genommenen Differentialquotienten von $f(m_1, n_1)$, so erhält man durch Differentiation der Gleichung $f(m, n) = f(m_1, n_1)$ nach Fortschaffung der Nenner

$$(4.)\quad \begin{cases} 2\sqrt{m}.\mu = \sqrt{m}.\mu_1 + \sqrt{n}.\nu_1, \\ 2\sqrt{n}.\nu = \sqrt{n}.\mu_1 + \sqrt{m}.\nu_1. \end{cases}$$

Dies sind die beiden Differentialgleichungen erster Ordnung. Man kann von denselben zu den drei Differentialgleichungen zweiter Ordnung übergehen, indessen sind dieselben nach der oben angeführten Doppelgleichung (3.) nicht unabhängig von einander, sondern es folgt aus zweien die dritte. Es genügt daher z. B. diejenigen beiden zu betrachten, welche aus den Differentialgleichungen erster Ordnung (4.) durch Differentiation nach m allein hervorgehen. Dies ergiebt

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m}}\mu + 2\sqrt{m}\frac{\partial\mu}{\partial m} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\mu_1 + \left(\sqrt{m}\frac{\partial\mu_1}{\partial m_1} + \sqrt{n}\frac{\partial\nu_1}{\partial m_1}\right)\frac{\partial m_1}{\partial m} + \left(\sqrt{m}\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1} + \sqrt{n}\frac{\partial\nu_1}{\partial n_1}\right)\frac{\partial n_1}{\partial m}, \\ 2\sqrt{n}\frac{\partial\nu}{\partial m} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\nu_1 + \left(\sqrt{n}\frac{\partial\mu_1}{\partial m_1} + \sqrt{m}\frac{\partial\nu_1}{\partial m_1}\right)\frac{\partial m_1}{\partial m} + \left(\sqrt{n}\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1} + \sqrt{m}\frac{\partial\nu_1}{\partial n_1}\right)\frac{\partial n_1}{\partial m}. \end{cases}$$

Man weifs überdies nach den früheren Betrachtungen, dafs die Differentialquotienten zweiter Ordnung von $f(m, n)$ also die Gröfsen $\frac{\partial\mu}{\partial m}$, $\frac{\partial\nu}{\partial m}$ nur in solcher Verbindung vorkommen können, wie sie sich in dem mit l bezeichneten Ausdruck (3.) finden, d. h. in der Determinante $\mu\frac{\partial\nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial m}$. Man hat demnach aus den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung (4.) und aus den beiden zweiter Ordnung (5.) die Determinante zu bilden und erhält

$$\begin{aligned} -2\sqrt{\frac{n}{m}}\mu\nu + 4\sqrt{mn}\left(\mu\frac{\partial\nu}{\partial m} - \nu\frac{\partial\mu}{\partial m}\right) = & -\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{m}}(\mu_1^2 - \nu_1^2) \\ & + \frac{\partial m_1}{\partial m}\cdot\begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{m} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \frac{\partial\mu_1}{\partial m_1} & \frac{\partial\nu_1}{\partial m_1} \end{vmatrix} \\ & + \frac{\partial n_1}{\partial m}\cdot\begin{vmatrix} \sqrt{m} & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & \sqrt{m} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ \frac{\partial\mu_1}{\partial n_1} & \frac{\partial\nu_1}{\partial n_1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Führt man dem Ausdruck l entsprechend den Ausdruck l_1 durch die Doppelgleichung

$$l_1 = m_1\left(\mu_1\frac{\partial\nu_1}{\partial m_1} - \nu_1\frac{\partial\mu_1}{\partial m_1}\right) = -n_1\left(\mu_1\frac{\partial\nu_1}{\partial n_1} - \nu_1\frac{\partial\mu_1}{\partial n_1}\right)$$

ein, so reducirt sich das erhaltene Resultat auf folgende einfache Gleichung:

$$(6.)\qquad -2\mu\nu+4l = -\tfrac{1}{2}(\mu_1^2-\nu_1^2)+\frac{m_1^2-n_1^2}{m_1n_1}l_1.$$

Diese Transformation hat noch nicht den oben auseinandergesetzten Charakter, da die ersten Differentialquotienten linker Hand in der Verbindung $\mu\nu$, rechter Hand in der Verbindung $\mu_1^2-\nu_1^2$ vorkommen. Da aber μ und ν lineare Functionen von μ_1 und ν_1 sind, so ergeben sich hieraus μ^2, $\mu\nu$ und ν^2 als lineare Functionen von μ_1^2, $\mu_1\nu_1$ und ν_1^2. Zwischen zwei gegebenen quadratischen homogenen Verbindungen von μ, ν und zweien solchen von μ_1, ν_1 besteht daher immer eine und nur eine Relation. So erhält man zwischen $\mu\nu$ und $\mu^2-\nu^2$ einerseits, $\mu_1\nu_1$ und $\mu_1^2-\nu_1^2$ andrerseits aus den Gleichungen (4.) die Relation

$$(7.)\quad \tfrac{1}{2}(m^2-n^2)\mu\nu+mn(\mu^2-\nu^2)=\tfrac{1}{2}\frac{m-n}{\sqrt{mn}}\{(m_1^2-n_1^2)\mu_1\nu_1+\tfrac{1}{2}m_1n_1(\mu_1^2-\nu_1^2)\}.$$

Multiplicirt man nun die früher erhaltene Gleichung (6.) mit $-\frac{1}{4}(m^2-n^2)$ und addirt sie zu dieser, so erhält man

$$(8.)\quad mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l)=\frac{m-n}{2\sqrt{mn}}\{m_1n_1(\mu_1^2-\nu_1^2)+(m_1^2-n_1^2)(\mu_1\nu_1-l_1)\},$$

also, wenn man den Ausdruck

$$mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l)$$

mit $\psi(m,n)$ bezeichnet,

$$\psi(m,n) = \frac{m-n}{2\sqrt{mn}}\psi(m_1,n_1).$$

Indem man diese Transformation wiederholt anwendet, bekommt man eine Reihe von Factoren $\frac{m-n}{2\sqrt{mn}}$, $\frac{m_1-n_1}{2\sqrt{m_1n_1}}$, etc., die sich immer mehr der Null nähern und deren Product um so mehr gleich Null wird. Dies Product multiplicirt in $\psi(\omega,\omega)$, welches, wie leicht zu sehen, ebenfalls gleich Null wird, ist dem Ausdruck $\psi(m,n)$, von dem ausgegangen wurde, gleich, also hat man

$$\psi(m,n) = 0,$$

d. h.

$$(9.)\qquad mn(\mu^2-\nu^2)+(m^2-n^2)(\mu\nu-l) = 0.$$

Es genügt also der Quotient $\frac{\nu}{\mu}$ in Beziehung auf die unabhängige Variable $\frac{n}{m}$ einer nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung. In der That, setzt man

$$\frac{n}{m}=x,\qquad \frac{\nu}{\mu}=y,$$

so erhält man die einfache Differentialgleichung

$$x(1-y^2)+(1-x^2)\frac{d(xy)}{dx} = 0$$

oder

$$(10.)\qquad x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+(x+y)(1-xy) = 0.$$

Eine Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades, welche wie die vorliegende von der Form

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2+By+C$$

ist, kann bekanntlich immer auf eine lineare der zweiten Ordnung zurückgeführt werden, in der nämlichen Art, wie es mit der *Riccati*schen Differentialgleichung zu geschehen pflegt. Eine solche Zurückführung gelingt durch verschiedene Substitutionen, in dem vorliegenden Fall z. B. durch die Substitution

$$y = -\frac{v'}{v+xv'} = -\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{d(xv)}{dx}},$$

wo $v' = \frac{dv}{dx}$ ist.

Man erhält alsdann für v die Differentialgleichung

$$(11.)\qquad 0 = (x-x^3)\frac{d^2v}{dx^2}+(1-3x^2)\frac{dv}{dx}-xv.$$

Die gebrauchte Substitution kommt aber damit überein, dafs man von dem Quotienten $\frac{\nu}{\mu} = \frac{\frac{\partial f}{\partial n}}{\frac{\partial f}{\partial m}}$ zu derjenigen Function $f(m, n)$ übergeht, welche eine homogene Function -1ter Ordnung von m und n also proportional $\frac{1}{\omega}$ ist. Denn für eine solche hat man

$$0 = f+m\mu+n\nu,$$

daher

$$y = \frac{\nu}{\mu} = -\frac{m\nu}{f+n\nu},$$

also wenn man mf, was blofs von $x = \frac{n}{m}$ abhängt, mit v bezeichnet

$$y = -\frac{\frac{dv}{dx}}{v+x\frac{dv}{dx}},$$

was die frühere Substitution ist. Ebenso würde die Substitution

$$y = -\frac{v'}{\varrho v + x v'}$$

der Betrachtung der homogenen Function $v = f(m, n)$ der Ordnung $-\varrho$ entsprechen, aber für keinen Werth aufser für $\varrho = 1$ giebt diese Formel eine Substitution, welche zu einer linearen Differentialgleichung führt. Hierin also liegt der Grund, warum der reciproke Werth des arithmetisch-geometrischen Mittels betrachtet werden mufste.

Die lineare Differentialgleichung (11.) wird also von dem Ausdruck $v = \frac{m}{\omega}$ befriedigt, wo ω das arithmetisch-geometrische Mittel von m und n, und $x = \frac{n}{m}$ ist. Dies Ergebnifs allein, verbunden mit der Nebenbedingung, dafs für $m = n$ auch $\omega = m$ wird, oder, was dasselbe ist, dafs für $x = 1$ auch $v = 1$ wird, würde zur vollständigen Bestimmung des arithmetisch-geometrischen Mittels genügen, wenn man auch nicht wüfste, dafs die Gleichung (11.) die Differentialgleichung des completen elliptischen Integrals in Beziehung auf seinen Modul ist. Mit Voraussetzung der von *Legendre* gegebenen Integration der Gleichung (11.) erhält man als ihr vollständiges Integral

$$v = CF(x) + C_1 F(x_1),$$

wenn man unter $F(x)$ das complete elliptische Integral erster Gattung des Moduls x versteht, und $x_1 = \sqrt{1-x^2}$ setzt. Für $x = 1$ wird $F(x) = \infty$, $F(x_1) = \frac{1}{2}\pi$. Damit der zugehörige Werth von v die Einheit sei, mufs man also $C = 0$, $C_1 = \frac{2}{\pi}$ setzen, und erhält

$$v = \frac{m}{\omega} = \frac{2}{\pi} F(x_1) = \frac{2}{\pi} m \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 \cos\varphi^2 + n^2 \sin\varphi^2}}.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die Zurückführung der ursprünglich erhaltenen nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung auf eine lineare zweiter Ordnung ohne Einführung des Quotienten $x = \frac{n}{m}$ zu bewirken. Man gelangt dann für die homogene Function -1ter Ordnung $f(m, n) = \frac{1}{\omega}$, also, was dasselbe ist, für das complete elliptische Integral (1.) zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche nur Differentialquotienten zweiter Ordnung nach m und n genommen enthält und ihrer Einfachheit wegen angeführt zu werden verdient.

Bezeichnet man mit a, b, c die Differentialquotienten zweiter Ordnung, so dafs

$$a = \frac{\partial\mu}{\partial m}, \quad b = \frac{\partial\mu}{\partial n} = \frac{\partial\nu}{\partial m}, \quad c = \frac{\partial\nu}{\partial n},$$

so erhält man, wenn f eine homogene Function -1ter Ordnung ist,

$$-2\mu = ma + nb,$$
$$-2\nu = mb + nc,$$

daher

$$2(n\mu - m\nu) = (m^2 - n^2)b - mn(a - c).$$

Ueberdies ergiebt sich aus der Doppelgleichung (3.)

$$l = m(\mu b - \nu a) = -n(\mu c - \nu b)$$

der neue Werth

$$(n\mu - m\nu)l = mn\{(\mu^2 - \nu^2)b - \mu\nu(a - c)\}.$$

Mit Benutzung hiervon geht die Differentialgleichung (9.)

$$mn(\mu^2 - \nu^2) + (m^2 - n^2)(\mu\nu - l) = 0,$$

nachdem man sie mit $2(n\mu - m\nu)$ multiplicirt hat, in folgende über:

$$\{(m^2 - n^2)b + mn(a - c)\}\{(m^2 - n^2)\mu\nu - mn(\mu^2 - \nu^2)\} = 0.$$

Der zweite Factor zerlegt sich wiederum in die beiden $m\nu - n\mu$, $m\mu + n\nu$, von denen der erste von der früheren Multiplication mit demselben herrührt, während der zweite $m\mu + n\nu$ mit der Function $f(m, n)$ selbst, abgesehen vom Zeichen, identisch ist. Verschwinden kann daher nur der erste Factor $(m^2 - n^2)b + mn(a - c)$ und es genügt demnach der reciproke Werth f des arithmetisch-geometrischen Mittels ω von m und n, oder, was dasselbe ist, das elliptische Integral (1.) der Differentialgleichung:

$$(12.) \qquad 0 = (m^2 - n^2)\frac{\partial^2 f}{\partial m \partial n} + mn\left(\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial n^2}\right).$$

Mit Berücksichtigung der leicht zu verificirenden Relationen

$$m^3 a = \frac{d^2(x^2 v)}{dx^2}, \quad m^3 b = -\frac{d^2(xv)}{dx^2}, \quad m^3 c = \frac{d^2 v}{dx^2}$$

geht (12.) in

$$0 = (1 - x^2)\frac{d^2(xv)}{dx^2} + x\frac{d^2([1 - x^2]v)}{dx^2}$$

über, welche Differentialgleichung mit (11.) übereinstimmt.

Berlin, im Februar 1858.



Ueber ein Attractionsproblem.

(Von Herrn *F. Joachimsthal* zu Breslau.)

Die Durchsicht der *Jullien*schen Aufgaben-Sammlung aus der Mechanik hat mir ein Attractionsproblem wieder in Erinnerung gebracht, das, an sich nicht ohne Interesse, auch deswegen eine Erwähnung verdient, weil seine Lösung eine Anwendung des von *Abel* zur Bestimmung der Tautochrone gegebenen Verfahrens (dieses Journal Bd. 1, p. 153) darbietet.

Aufgabe. Die einzelnen Theilchen einer unendlichen homogenen Geraden ziehen den Punkt m, dessen Entfernung von der Geraden $=h$ ist, nach einer unbekannten Function der Entfernung $f(r)$ an; man soll dieselbe finden, wenn durch Beobachtung die nach dem Lothe h gerichtete Total-Attraction $\varphi(h)$ bekannt ist.

Auflösung. Ist der Kürze wegen die Masse von m, die Dichtigkeit der Geraden und die Constante der Anziehung $=1$, so hat man das unbekannte Attractionsgesetz $f(r)$ aus der Gleichung

$$(1.)\quad \varphi(h) = 2h\int_h^\infty \frac{f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-h^2}}$$

oder, wenn $\frac{\varphi(h)}{2h} = F(h)$ gesetzt wird, aus

$$(2.)\quad F(h) = \int_h^\infty \frac{f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-h^2}}$$

zu bestimmen. Nimmt man zuvörderst an, dafs $f(r)$ nach ganzen negativen Potenzen von r sich entwickeln lasse, so dafs

$$(3.)\quad f(r) = \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_2}{r^2} + \frac{\alpha_3}{r^3} + \cdots,$$

so kommt

$$(4.)\quad F(h) = \int_h^\infty \frac{f(r)\,dr}{\sqrt{r^2-h^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} f\left(\frac{h}{\cos u}\right)\frac{du}{\cos u}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha_1}{h} + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_3}{h^3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\alpha_5}{h^5} + \cdots\right)$$
$$+ \frac{\alpha_2}{h^2} + \tfrac{2}{3}\frac{\alpha_4}{h^4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\alpha_6}{h^6} + \cdots.$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F\left(\frac{h}{\cos u}\right) du = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha_1}{h} + \tfrac{1}{2}\frac{\alpha_2}{h^2} + \tfrac{1}{3}\frac{\alpha_3}{h^3} + \cdots\right),$$

und endlich

$$\tfrac{1}{2}\pi f(h) = \frac{\partial \int_0^{\frac{1}{2}\pi} F\left(\frac{h}{t\cos u}\right) du}{\partial t},$$

wenn nach erfolgter Differentiation $t=1$ gesetzt wird; d. h.

$$\tfrac{1}{2}\pi f(h) = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{h}{\cos u} F'\left(\frac{h}{\cos u}\right) du = -\int_h^\infty \frac{h F'(\varrho)\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - h^2}}.$$

Dafs in der That aus

$$(2.)\qquad F(h) = \int_h^\infty \frac{f(r)\, dr}{\sqrt{r^2 - h^2}}$$

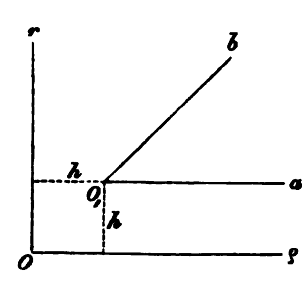
die Gleichung folgt:

$$(5.)\qquad f(r) = -\frac{2}{\pi}\int_r^\infty \frac{r F'(\varrho)\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}},$$

läfst sich unabhängig von der Existenz der Reihenentwickelung (3.) nachweisen, wenn nur $F(h)$ für $h=\infty$ verschwindet. Setzt man nämlich den Werth von $f(r)$ aus (5) in die rechte Seite von (2.) ein, so kommt das Doppelintegral

$$(6.)\qquad -\frac{2}{\pi}\int_h^\infty \int_r^\infty \frac{r F'(\varrho)\, d\varrho\, dr}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}\sqrt{r^2 - h^2}},$$

dessen Werth $= F(h)$ sein mufs.



Denkt man sich in der Ebene ein rechtwinkliges (r, ϱ) System, und von dem Punkte O_1, dessen Coordinaten $=h$ sind, $O_1 a$ parallel $O\varrho$ gezogen, so wie $O_1 b$, dessen Verlängerung durch O geht, so erstreckt sich (6.) über den unendlichen Winkelraum bO_1a. Summirt man jetzt zuerst nach r und dann nach ϱ, so verwandelt sich (6.) in

$$(7.)\qquad -\frac{2}{\pi}\int_h^\infty \int_h^\varrho \frac{r F'(\varrho)\, dr\, d\varrho}{\sqrt{(r^2 - h^2)(\varrho^2 - r^2)}},$$

welche Summe wegen

$$\int_h^\varrho \frac{2r\, dr}{\sqrt{(r^2 - h^2)(\varrho^2 - r^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi$$

in

$$F(h) - F(\infty)$$

übergeht; w. z. b. w. Nimmt die Total-Attraction $\varphi(h)$ mit wachsendem h immer mehr ab, verschwindet also $\frac{\varphi(h)}{h}$ für $h = \infty$, so ist demnach die Elementar-Attraction

$$(8.) \quad f(r) = -\frac{r}{\pi}\int_r^\infty \frac{d\left(\frac{\varphi(\varrho)}{\varrho}\right)}{\sqrt{\varrho^2 - r^2}}.$$

Breslau, im Februar 1860.

Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe.

(Par M. *Cremona* à Milan.)

I.

1. Je suppose que l'on ait deux séries projectives de points, l'une dans une droite R, l'autre dans une conique plane C, situées d'une manière tout à fait arbitraire dans l'espace. On demande de connaître la surface lieu de la droite qui joint deux points homologues des formes projectives données.

Pour établir la *classe* de cette surface, je fais usage des considérations employées par M. *Schröter* dans un mémoire inséré dans ce journal (tome 54). Par un point O fixé arbitrairement sur la conique je tire des droites aux divers points de cette courbe; ainsi l'on obtiendra un faisceau de droites, perspectif à la conique. Par une droite arbitraire S menons un faisceau de plans, perspectif à la droite donné. Les deux faisceaux étant projectifs, l'intersection des élémens homologues donnera une conique K située dans le plan de la conique donnée, et passant par le point O et par la trace de S. La conique K coupera la conique C en trois autres points, qui avec la droite S donnent lieu à trois plans; et il est bien évident que ces plans contiennent chacun une génératrice de la surface cherchée, et sont les seuls qui passent par S et qui aient cette propriété.

Donc *la surface est de la troisième classe, et par conséquent du troisième ordre;* car toute surface réglée (non développable) a son ordre égal à sa classe *).

Chaque plan mené par la directrice rectiligne donnée R rencontre la conique C en deux points, donc il contient deux génératrices de la surface: le lieu de l'intersection de ces deux génératrices est la *droite double* (ligne de striction) de la surface. C'est-à-dire: par chaque point de la droite double passent deux génératrices situées dans un plan passant par la directrice R. Ces génératrices déterminent deux involutions, l'une sur la droite R, l'autre sur la conique C. Les élémens doubles de ces involutions

---

*) *Cayley:* Cambridge and Dublin Math. Journal. VII, p. 171.



sont en même temps réels ou imaginaires; ils sont individués par les plans tangens à la conique C menés par la droite R.

Il est évident que le plan de la conique C contient une génératrice de la surface; car la trace de R sur ce plan aura son point homologue sur la conique, et la droite qui joint ces points sera une génératrice de la surface. Cette même droite rencontrera la conique dans un second point; par lequel passe la droite double.

2. Si l'on considère de nouveau les formes projectives proposées R et C, un point quelconque de la droite R, et la droite tangente à la conique au point homologue déterminent un plan. Ce plan est osculateur d'une courbe à double courbure dont on demande la *classe*.

Par un point O pris arbitrairement dans l'espace et par la droite R menons un plan qui coupera le plan de la conique C suivant une droite S, et imaginons un faisceau de droites perspectif à la droite R et ayant son centre en O. Ce faisceau divisera la droite S homographiquement à la droite R. Une tangente fixe (arbitraire) T de la conique C est divisée par toutes les autres tangentes homographiquement à la droite R; donc nous aurons sur les droites S et T deux séries projectives de points. La droite qui joint deux points homologues de ces séries enveloppe une conique K qui touchera les droites S et T, et par conséquent aura trois autres tangentes communes avec la conique C. Ces trois tangentes communes avec le point O déterminent trois plans qui évidemment sont osculateurs de la courbe cherchée, et sont les seuls qui passent par O. Donc ***cette courbe est de la troisième classe*** (***et du troisième ordre*** *)).

Le plan de la conique C est osculateur de la courbe nommée (***cubique gauche***) et par la droite R passent deux plans osculateurs (réels ou imaginaires) de la même courbe.

3. Réciproquement: soient données une cubique gauche, un plan osculateur et une droite R intersection de deux autres plans osculateurs (réels ou imaginaires). Le premier plan osculateur coupera la surface développable, dont la cubique est l'arête de rebroussement, suivant une conique C **). Les plans osculateurs de la cubique gauche déterminent sur la droite R et sur la conique C deux séries projectives de points. ***La droite qui joint deux***

---

*) *Schröter:* Ce Journal, Tome 56, p. 27.

**) *Möbius:* Der barycentrische Calcul, p. 120.

points homologues de ces formes engendre une surface du troisième ordre (et troisième classe), dont la droite double gît dans un plan osculateur de la cubique gauche.

Si la droite R est fixe, et l'on fait varier le plan de la conique C, on obtiendra un faisceau de surfaces cubiques, dont les droites doubles formeront un hyperboloïde à une nappe, et l'on aura sur la cubique gauche une involution, dont deux élémens conjugués sont le plan variable de la conique C et le plan osculateur qui passe par la droite double correspondante.

II.

4. On donne deux formes projectives: l'une soit un faisceau de plans passant par une même droite R; l'autre soit un faisceau de plans tangens à un même cône C du second ordre. Les élémens homologues s'entrecoupent dans une droite qui engendre une surface cubique, dont R est la droite double. Par un point quelconque de R passent deux génératrices, dont le plan tourne autour d'une droite fixe S. C'est-à-dire: chaque plan qui passe par cette droite S contient deux génératrices qui donnent lieu à une involution de plans sur le cône C et à une deuxième involution de plans par R. Les élémens doubles de ces involutions sont individués par les points où R perce C.

La droite R avec le sommet du cône C détermine un plan, qui aura son correspondant tangent à cette surface; la droite intersection de ces plans sera une génératrice de la surface. Par cette génératrice passe un autre plan tangent du cône, et ce dernier plan passe aussi par la droite S.

5. Dans les formes projectives données je considère un plan du faisceau R et la génératrice de contact du plan homologue tangent au cône C. La génératrice perce le plan en un point, dont le lieu est une cubique gauche qui passe par le sommet du cône et par les intersections de cette surface avec la droite donnée.

6. Réciproquement: je suppose maintenant que l'on ait une cubique gauche, un de ses points comme sommet d'un cône C passant par la courbe, et une droite R qui s'appuie en deux points (réels ou imaginaires) de la même cubique. Chaque point de la courbe donne lieu à un plan passant par R, et à un autre plan tangent au cône C. Ces plans forment deux systèmes projectifs. La droite intersection de deux plans homologues en-

gendre une surface cubique qui contient une autre directrice rectiligne S rencontrant la cubique en un seul point. Si la droite R est fixe, et l'on fait varier le sommet du cône C, on obtient un système de surfaces cubiques et la droite S engendre un hyperboloïde à une nappe. De plus, on aura sur la cubique gauche une involution formée par les sommets des cônes et les points d'appui des droites S correspondantes.

III.

7. On a deux formes projectives: une série de points dans une droite R, et un système de droites génératrices d'un hyperboloïde H. Quelle est la courbe à double courbure osculée par le plan déterminé par deux élémens homologues des formes proposées? Fixons arbitrairement une génératrice S de l'autre système dans l'hyperboloïde; cette génératrice sera divisée par les droites du système donné homographiquement à la droite R. On a donc deux séries projectives de points sur les droites R, S; et on sait que la droite qui joint deux points homologues engendre un hyperboloïde K passant par les droites R et S. Il est d'ailleurs évident que chaque plan individué par deux élémens homologues des formes proposées est tangent aux hyperboloïdes H et K; donc la courbe demandée est osculée par les plans tangens communs à deux hyperboloïdes qui ont une génératrice commune (S). Donc elle est une cubique gauche qui a deux plans osculateurs passant par R. Cette courbe a en outre un plan osculateur passant par chaque génératrice de l'hyperboloïde du système donné, et deux plans osculateurs passant par chaque droite de l'autre système.

8. Soient données de nouveau deux formes projectives, dont l'une soit un faisceau de plans par une droite R, et l'autre un système de génératrices d'un hyperboloïde H. Deux élémens homologues s'entrecoupent en un point, dont on demande de connaître le lieu géométrique. Fixons une génératrice S de l'autre système; cette droite avec les génératrices du système donné donne lieu à un faisceau de plans homographique au faisceau donné. La droite intersection de deux plans homologues de ces faisceaux projectifs engendre un second hyperboloïde K, passant par R, S. On voit aisément que chaque point du lieu demandé est commun aux deux hyperboloïdes; donc ce lieu est la cubique gauche intersection de ces surfaces, qui ont déjà en commun la droite S. La cubique gauche a deux points sur R; un point sur

chacune des génératrices données, et deux points sur chacune des droites de l'autre système *).

9. Réciproquement, supposons que l'on ait une cubique gauche et un hyperboloïde touché par tous les plans osculateurs de la courbe. Par chaque génératrice de l'un système, dans l'hyperboloïde, passe un seul plan osculateur de la cubique, et par chaque génératrice de l'autre système passent deux plans osculateurs. Imaginons aussi une droite, intersection de deux plans osculateurs (réels ou imaginaires). Cette droite sera coupée par les plans osculateurs qui passent par les génératrices du second système en deux séries de points en involution. Les plans osculateurs qui passent par les génératrices du premier système forment sur cette même droite une division projective au système nommé de génératrices. D'où il suit que les plans osculateurs de la cubique et les génératrices du premier système situées dans ces plans constituent deux formes projectives.

On a maintenant une cubique gauche et un hyperboloïde passant par cette courbe. L'hyperboloïde a deux systèmes de génératrices: toutes les droites de l'un système s'appuient à la courbe en un seul point, et toutes les droites de l'autre système s'appuient à la courbe en deux points. Si l'on donne aussi une droite qui soit corde (réelle ou idéelle) de la cubique, elle déterminera avec les points de la courbe qui sont dans les droites du second système une involution de plans, et avec les points de la courbe qui appartiennent aux droites du premier système un faisceau de plans projectif à ce même système de génératrices. D'où il suit que les points de la courbe et les génératrices du premier système constituent deux formes projectives.

Les deux systèmes de génératrices d'un hyperboloïde qui passe par une cubique gauche, ou qui touche les plans osculateurs d'une telle courbe se correspondent aussi projectivement entre eux.

Une conique située dans la surface développable dont l'arête de rebroussement est une cubique gauche est une forme projective à la cubique. A un point quelconque de celle-ci correspond le point de la conique situé dans le plan osculateur de la cubique au point sus-dit. La droite qui joint ces points homologues est tangente à la cubique, et par conséquent elle engendre la surface développable du quatrième ordre et de la troisième classe, dont la cubique est l'arête de rebroussement.

---

*) *Chasles:* Journal de M. *Liouville,* année 1857, p. 397.

Un cône de second ordre passant par une cubique gauche est une forme projective à celle-ci. A un point de la cubique correspond le dlan tangent du cône qui passe par ce point.

10. Applications. On donne un hyperboloïde et cinq de ses points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; on demande de construire une cubique gauche qui passe par ces points et soit située sur la surface nommée. La courbe cherchée sera le lieu de l'intersection des élémens homologues de deux formes projectives, dont l'une soit un faisceau de plans et l'autre soit un système de génératrices de l'hyperboloïde. On peut prendre pour axe du faisceau la droite a_4a_5; les plans $a_1(a_4a_5)$, $a_2(a_4a_5)$, $a_3(a_4a_5)$ seront trois plans du faisceau. Les élémens homologues de l'autre forme seront les génératrices du premier (ou du second) système qui passent par a_1, a_2, a_3. Alors à chaque plan passant par a_4a_5 correspondra une génératrice du même système, et l'intersection de ces élémens sera un point de la cubique cherchée. Comme on est libre de prendre le système de génératrices que l'on veut, ainsi il y aura deux cubiques gauches satisfaisant à la question (proposée par M. *Chasles* *)).

Pour deuxième application, proposons nous de construire la cubique gauche qui s'appuie sur cinq droites données A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Elle sera évidemment l'intersection des hyperboloïdes déterminés par les deux ternes de droites: $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$ qui ont une droite commune A_3. Cette construction est aussi une conséquence du théorème connu: on peut construire cinq faisceaux homographiques de plans, dont les axes soient cinq droites données, et où cinq plans homologues passent toujours par un même point.

On donne quatre faisceaux homographiques de plans, dont les axes soient les droites A_1, A_2, A_3, A_4. On demande combien de fois quatre plans homologues se coupent dans un même point **)? Les faisceaux projectifs A_1 et A_2; A_1 et A_3; A_1 et A_4 donnent trois hyperboloïdes qui ont une génératrice commune A_1. Ces hyperboloïdes, abstraction faite de cette génératrice s'entrecoupent en quatre points seulement ***) et il est bien évident que par chacun de ces points passent quatre plans homologues des faisceaux donnés.

On démontre analoguement qu'il y a généralement quatre plans, chacun

*) Journal de M. *Liouville,* année 1857, p. 397.

**) *Steiner:* Systematische Entwickelung der Abhängigkeit etc. p. 298.

***) *Chasles:* Journal de M. *Liouville,* l. c.

contenant quatre points homologues de quatre divisions homographiques sur quatre droites données *).

Si les quatre faces d'un tétraèdre mobile tournent autour de quatre droites fixes A, B, C, D, et que les côtés de la première face s'appuient sur trois autres droites fixes L, M, N, le sommet opposé à cette face engendrera une courbe qu'on demande de connaître. La première face du tétraèdre, en tournant autour de A, divise homographiquement les droites L, M, N; soient l, m, n trois points homologues de ces divisions. Il en suit que lB, mC, nD sont trois plans homologues de trois faisceaux projectifs; donc leur point d'intersection engendre une cubique gauche, qui s'appuie en deux points sur chacune des droites L, M, N **).

Ayant dans l'espace trois points a, b, c et trois plans α, β, γ, si autour d'une droite fixe on fait tourner un plan transversal qui coupera les trois plans donnés suivant trois droites A, B, C, les plans Aa, Bb, Cc se couperont en un point, dont on demande le lieu géométrique. Soient a', b', c' les points où la droite donnée rencontre les plans α, β, γ. Ces plans contiennent trois faisceaux projectifs de droites, dont a', b', c' sont les centres, et A, B, C sont trois rayons homologues. Donc les droites aa', bb', cc' sont les axes de trois faisceaux projectifs de plans, dont Aa, Bb, Cc sont trois élémens correspondans, et par conséquent le point commun à ces plans engendrera une cubique gauche qui aura deux points sur chacune des droites aa', bb', cc' ***).

IV.

11. On donne un hexagone gauche 123456 inscrit dans une cubique gauche. Par les côtés de l'hexagone menons six plans à un point quelconque x de la courbe. Ces plans coupent les côtés opposés respectivement à ceux par lesquels ils passent en six points a, b, c, a', b', c' (a, b, c étant sur trois côtés consécutifs, et a', b', c' sur les côtés opposés). ***Ces six points sont dans un même plan qui passe par le point variable x de la courbe, et par une droite fixe. Cette droite fixe est une corde réelle ou idéelle de la cubique.*** Les six points a, b, ... c' forment un hexagone de ***Brianchon*** (les diagonales aa', bb', cc' se rencontrent au point x).

---

*) *Steiner:* l. c.

**) *Chasles:* Aperçu historique etc. Note 33ᵉ.

***) *Chasles:* Aperçu etc. l. c.

Si le point x parcourt la cubique, les points $a, b, \ldots c'$ engendrent six divisions homographiques sur les côtés de l'hexagone; les droites aa', bb', cc' engendrent trois hyperboloïdes qui passent tous par la cubique et chacun par une couple de côtés opposés de l'hexagone. Ces trois hyperboloïdes ont pour génératrice commune à tous trois la corde fixe sur la quelle tourne le plan des six points $a, b, \ldots c'$.

C'est-à-dire: les trois hyperboloïdes qui passent par une cubique gauche et chacun par une couple de côtés opposés d'un hexagone inscrit dans la cubique ont en commun une même génératrice qui est une corde réelle ou idéelle de la courbe.

12. *Si par un des sommets de l'hexagone gauche on mène deux plans tangens à la cubique, qui passent respectivement par les côtés qui ont en commun le dit sommet, ces plans coupent les côtés opposés en deux points, qui avec le premier sommet déterminent un plan passant aussi par une droite fixe, quelque soit le sommet qu'on a choisi dans l'hexagone.* Cette droite fixe est la même qui est commune aux trois hyperboloïdes, et autour de la quelle tourne le plan $ab \ldots c'$.

On peut nommer cette droite la *caractéristique* de l'hexagone 123456.

Six points de la cubique donnent lieu à soixante hexagones; chacun d'eux a sa caractéristique et ses trois hyperboloïdes. Un hyperboloïde contient quatre caractéristiques; par exemple les hexagones

(123456), (126453), (123546), (126543)

ont leurs caractéristiques situées sur l'hyperboloïde (12 — 45). Chaque caractéristique est commune à trois hyperboloïdes, donc il y a quarante-cinq hyperboloïdes pour six points donnés sur la cubique gauche.

On déduit très aisément du théorème fondamental donné ci-dessus la suivante proposition de M. *Chasles* *):

Quand un eptagone gauche a ses sommets situés sur une cubique gauche, le plan de l'un quelconque des angles de l'eptagone et les plans des deux angles adjacens rencontrent respectivement les côtés opposés en trois points qui sont dans un plan passant par le sommet du premier angle.

V.

13. Une cubique gauche peut avoir trois asymptotes réelles, ou bien une seule asymptote réelle, et deux imaginaires. Comme cas particuliers, la

*) Aperçu etc. l. c.

courbe peut avoir une seule asymptote réelle à distance finie, et les deux autres coïncidentes à l'infini, ou bien elle peut être osculée par le plan à l'infini. Il serait bon d'adopter les dénominations que M. *Seydewitz* *) propose pour ces quatre formes de cubique gauche, savoir: *hyperbole gauche; ellipse gauche; hyperbole parabolique gauche; parabole gauche.*

*L'ellipse gauche a deux plans osculateurs parallèles entre eux qui coupent la surface développable (dont la courbe est l'arête de rebroussement) suivant deux paraboles; tous les autres plans osculateurs coupent la même surface suivant des ellipses ou des hyperboles. Les centres de toutes ces coniques sont sur une hyperbole dont le plan est parallèle et équidistant aux deux plans osculateurs parallèles. Une branche de l'hyperbole locale contient les centres des ellipses; l'autre branche contient les centres des hyperboles. Les points de la cubique auxquels correspondent des ellipses sont situés entre les plans osculateurs parallèles; les points auxquels correspondent des hyperboles sont au dehors. Le plan de l'hyperbole locale rencontre la cubique en un seul point réel**) et coupe les cônes du second ordre qui passent par la courbe suivant des ellipses.*

L'hyperbole gauche n'a pas de plans osculateurs parallèles; tous ses plans osculateurs coupent la surface développable qu'ils enveloppent suivant des hyperboles, dont les centres sont sur une ellipse. Le plan de cette ellipse rencontre la cubique en trois points réels, et coupe les cônes du second ordre qui passent par la cubique suivant des hyperboles.

L'hyperbole parabolique gauche est l'arête de rebroussement d'une surface développable qui est coupée par ses plans tangens suivant des hyperboles, à l'exception d'un seul qui la coupe suivant une parabole. Les centres de ces hyperboles sont sur une autre parabole. Les deux paraboles sont dans un même plan; et ce plan coupe les cônes du second ordre qui passent par la cubique suivant des paraboles.

La parabole gauche a toutes ses asympotes qui coïncident à l'infini. Les plans osculateurs coupent la développable suivant des paraboles.

---

*) Grunerts Archiv etc. X, p. 203.

**) *Chaque plan passant par une droite intersection de deux plans osculateurs réels (imaginaires) coupe la cubique gauche en un seul point réel (en trois points réels)*: théorème que j'ai démontré ailleurs (*Annali di Matematica*, gennaio-febbraio 1859). M. *Joachimsthal* avait donné ce même théorème dans la savante Note qui suit le mémoire de M. *Schröter* (ce Journal, B. 56, p. 45).

14. M. *Seydewitz* a déjà observé que par une hyperbole gauche passent trois cylindres du second ordre hyperboliques; par une ellipse gauche passe un seul cylindre elliptique; par l'hyperbole parabolique gauche passent deux cylindres, l'un hyperbolique et l'autre parabolique; enfin par la parabole gauche passe un seul cylindre parabolique. Cela nous aidera à énoncer des propositions nouvelles.

Concevons la droite intersection du plan osculateur au point a d'une cubique gauche avec le plan qui coupe cette courbe en a et la touche en b; *toute corde de la cubique qui s'appuie à cette droite est rencontrée harmoniquement par une deuxième droite* qui est l'intersection du plan osculateur en b avec le plan sécant en b et tangent en a.

Cette intéressante propriété donne lieu à plusieurs conséquences. Si l'une des deux droites dont il est question ci-dessus tombe à l'infini, la corde est bissectée par l'autre droite. Cela donne lieu au théorème qui suit:

En chaque point d'une parabole gauche on peut mener un plan tangent, qui soit parallèle au cylindre passant par la courbe. Toute corde de celle-ci, parallèle à ce plan est divisée en deux parties égales par une droite (diamètre) qui est l'intersection du plan osculateur et du plan sécant au même point et tangent à l'infini. Tous ces diamètres dont un passe par chaque point de la parabole gauche sont parallèles à un même plan, savoir à la direction commune des plans tangens à l'infini.

Cette propriété qui, dans la parabole gauche, subsiste pour chacun de ses points, appartient aussi à l'hyperbole et à l'ellipse gauche, mais seulement pour les points (trois ou un seul) où elles sont rencontrées par le plan des centres des coniques inscrites dans la surface développable dont la courbe gauche est l'arête de rebroussement.

Donc *l'ellipse gauche a un diamètre qui rencontre en un même point la courbe et le plan des centres. Le plan qui touche la courbe en ce point et est parallèle au cylindre elliptique passant par celle-ci, est aussi parallèle aux cordes divisées en deux parties égales par le diamètre nommé.*

L'hyperbole gauche a trois diamètres. Ici il faut remarquer que: *à chaque point commun à la cubique et au plan des centres correspond une asymptote de celle-ci ou bien un des trois cylindres hyperboliques.* Voilà en quoi consiste cette correspondance:

Le plan osculateur de l'hyperbole gauche en un point du plan

des centres, et le plan qui passe par ce point et par l'asymptote correspondante, s'entrecoupent suivant une droite qui est un diamètre de la conique intersection du plan osculateur avec le cylindre hyperbolique qui contient l'asymptote nommée.

VI.

15. On sait que le point de concours et les points de contact de trois plans osculateurs d'une cubique gauche sont en un même plan *). Le point de concours a reçu le nom de *foyer* du plan. Tous les plans qui passent par une même droite ont leurs foyers sur une autre droite, et tous les plans qui passent par cette deuxième droite ont leurs foyers sur la première. Deux droites, telles que les points de l'une soient les foyers des plans qui passent par l'autre ont reçu la dénomination de *droites réciproques*. Une droite qui soit l'intersection (réelle ou idéelle) de deux plans osculateurs, et la corde (réelle ou idéelle) qui joint les points de contact sont des droites reciproques.

On sait que dans un plan quelconque il n'y a qu'une droite qui soit intersection de deux plans osculateurs **), et par un point quelconque on ne peut mener qu'une corde de la cubique gauche ***).

Concevons un plan qui coupe un autre plan contenant une conique et cherchons le pôle de la droite intersection des deux plans par rapport à la conique; nous dirons que *ce point est le pôle du premier plan par rapport à la conique.*

Cela premis, *les pôles d'un plan quelconque par rapport à toutes les coniques inscrites dans la développable, dont une cubique gauche donnée est l'arête de rebroussement, sont tous dans une conique, dont le plan a tous ses pôles, par rapport aux mêmes coniques inscrites, dans une autre conique située dans le premier plan.*

J'appelle *conjoints* deux plans tels que l'un contient les pôles de l'autre par rapport aux coniques inscrites dans la développable, et *conjointes* les coniques lieux des pôles de deux plans conjoints.

Deux plans conjoints s'entrecoupent suivant une droite qui est toujours l'intersection (réelle ou idéelle) de deux plans osculateurs, et

*) *Chasles:* Journal de M. *Liouville,* année 1857, p. 397.

**) *Schröter:* ce Journal, B. 56, p. 33.

***) *Chasles:* l. c.

par conséquent ils ont leurs foyers sur la droite qui passe par les points de contact.

Il suit de là que:

Toute droite qui soit l'intersection de deux plans osculateurs est l'axe d'un faisceau de plans conjoints deux à deux; ces plans forment une involution dont les élémens doubles sont les plans osculateurs.

Toute corde de la cubique gauche contient les foyers d'un faisceau de plans conjoints deux à deux; ces foyers forment une involution dont les élémens doubles sont les points de la cubique.

16. *Toutes les coniques conjointes qui appartiennent à un même faisceau sont situées sur un même hyperboloïde à une nappe; et le lieu géométrique de leurs centres est une conique dont le plan passe par la droite des foyers.*

Il est facile d'établir aussi l'espèce de ces coniques conjointes, selon les divers cas à considérer. Par exemple, pour la parabole gauche on a le théorème qui suit:

Toutes les coniques conjointes qui appartiennent à un même faisceau sont des hyperboles, à l'exception d'une seule parabole dont le plan passe par le point central de l'involution des foyers. Les centres de ces hyperboles sont dans une parabole. Les cordes de cette parabole qui joignent deux à deux les centres des coniques conjointes passent toutes par un même point. Les asymptotes des coniques conjointes sont toutes parallèles à deux plans.

VII.

17. Il est facile de construire une cubique gauche sur un des cylindres qui passent par elle. Une cubique gauche étant rapportée à trois axes, nous supposerons que l'unité linéaire change de l'un axe à l'autre; θ exprimera toujours une variable.

On construit très aisément la parabole gauche au moyen des équations:

$$x = \theta^3, \quad y = \theta^2, \quad z = \theta \text{ *)}.$$

L'équation:

$$z^2 - y = 0$$

représente le cylindre (parabolique) qui passe par la courbe. L'origine des

*) Annali di Matematica — Roma — maggio 1858; settembre 1858; gennajo 1859; luglio 1859.

coordonnées est un point quelconque de celle-ci; le plan des zy est osculateur; celui des xz est tangent à l'origine et parallèle au cylindre; le plan des xy est tangent à l'infini.

La courbe n'a qu'une branche qui s'étend à l'infini tout le long du cylindre, sans asymptotes.

18. Pour l'hyperbole parabolique gauche on a les équations:

$$x=\frac{\theta^3}{\theta-\alpha},\quad y=\theta^2,\quad z=\theta,$$

α est une constante. Le cylindre parabolique qui passe par la courbe est représenté par l'équation:

$$z^2-y=0.$$

L'origine est un point arbitraire de la courbe; le plan des zy est osculateur; celui des xz est tangent à l'origine et parallèle au cylindre parabolique; le plan des yx est parallèle aux deux cylindres qui passent par la courbe.

La courbe est composée de deux branches infinies, dont chacune a un bras sans asymptote; les deux autres bras ont une asymptote commune qui est une génératrice du cylindre parabolique.

Les deux branches diffèrent en cela, par rapport au cylindre parabolique, que, si on suppose ceci vertical, les bras d'une branche s'étendent tous deux en haut à l'infini, tandis que l'autre branche a un bras qui s'étend en haut, et l'autre qui s'étend en bas.

On peut construire l'hyperbole parabolique gauche aussi par les équations:

$$x=\frac{\theta^3}{\theta-\alpha},\quad y=\theta-\alpha,\quad z=\frac{\alpha}{\theta-\alpha}.$$

L'équation:

$$yz-\alpha=0$$

représente le cylindre hyperbolique qui passe par la courbe. Des deux nappes de ce cylindre, l'une contient une branche, l'autre contient l'autre branche de la courbe gauche.

19. On construit l'ellipse gauche au moyen des équations:

$$x=\frac{\theta^3}{\theta^2+\alpha^2},\quad y=\frac{\theta^2}{\theta^2+\alpha^2},\quad z=\frac{\theta}{\theta^2+\alpha^2};$$

l'équation du cylindre elliptique qui passe par la courbe est:

$$y(1-y)-\alpha^2z^2=0.$$

Ici l'origine est le point de la courbe où elle est rencontrée par le plan des centres des coniques inscrites dans la développable dont la courbe gauche est

l'arête de rebroussement. Le plan des yz est osculateur; celui des zx est tangent à l'origine et parallèle au cylindre; celui des xy est tangent à l'infini.

La courbe a une seule branche qui s'étend à l'infini tout le long du cylindre, et s'approche d'une asymptote qui est une génératrice du même cylindre.

20. Si on change α^2 en $-\alpha^2$ les mêmes équations conviennent à l'hyperbole gauche, considérée sur un quelconque des trois cylindres hyperboliques qui passent par elle. La courbe est composée de trois branches infinies, dont chacune s'approche de deux asymptotes. Deux branches sont situées sur la nappe du cylindre (qu'on considère), qui contient une asymptote; la troisième branche est sur l'autre nappe.

En rapportant les trois branches aux six nappes des cylindres, on trouve que par chaque branche passent trois nappes appartenant à trois divers cylindres; une de ces nappes ne contient pas d'asymptotes, et chacune des autres en contient une.

Milan, 27. mars 1860.

Ueber die Vertheilung der statischen Electricität in einem kreisförmig begrenzten Segment einer Kugelfläche.

(Von Herrn *R. Lipschitz* zu Bonn.)

Die Einsicht in die Vertheilung der statischen Electricität bei einem leitenden Körper von bestimmter Gestalt hängt bekanntlich davon ab, dafs sein Zustand unter zwei einfachen Voraussetzungen theoretisch erforscht ist. Nach der einen Voraussetzung ist dem Leiter ein gewisses Quantum Electricität mitgetheilt, und es wirken keine äufsern Kräfte auf denselben, nach der andern übt ein aufserhalb des Körpers befindlicher Massenpunkt eine erregende Wirkung aus. Die beiden Aufgaben, welche hieraus entspringen, werden im Vorliegenden für den Fall gelöst werden, dafs die Form des Leiters als das durch einen beliebigen Kreis begrenzte Segment einer Kugelfläche betrachtet wird, indem die eine Dimension des Körpers, gegen die beiden andern Dimensionen verschwindend klein ist. Die erste der bezeichneten Aufgaben hat *Green* mit der Einschränkung behandelt*), dafs bei dem Leiter nur ein kleines Segment zur ganzen Kugelfläche fehle, und dafs kleine Gröfsen von höherer Ordnung als der Quotient des Radius des begrenzenden Kreises durch den Radius der Kugel vernachlässigt werden. Die gegebene Auflösung steht mit der meinigen in vollem Einklang, eine andre Arbeit über diesen Gegenstand ist mir aber nicht bekannt geworden. Die Untersuchung, welche den Inhalt des Folgenden bildet, beruht wesentlich auf den Eigenschaften derjenigen Function, mittelst welcher die Wirkung einer durch einen electrischen Massenpunkt inducirten leitenden Kreisscheibe in einem frühern Aufsatz dargestellt ist**), und die hervorgehenden Resultate, die den entsprechenden Sätzen für die Kreisscheibe an Einfachheit gleichkommen, lassen das gemeinsame Band

---

*) Band XLVII, pag. 174ff. dieses Journals.

**) Beiträge zur Theorie der Vertheilung der statischen und der dynamischen Electricität in leitenden Körpern (S. pag. 1ff. und pag. 39 dieses Bandes).



zwischen diesen und den für die ganze Kugelfläche geltenden Sätzen deutlich erkennen.

Indem ich zu dem Gegenstande der Mittheilung übergehe, fixire ich die Lage des leitenden Kugelflächensegments, das S genannt werden soll, so, dafs die begrenzende Kreislinie in eine horizontale Ebene fällt, und das Segment S sich oberhalb dieser Ebene befindet. Die Fläche der ganzen Kugel, zu der S gehört, mag K, die Fläche des begrenzenden Kreises F heifsen; der Radius von K werde mit r_0, der Radius von F mit c bezeichnet. Der Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z sei der Mittelpunkt O von F, die Axen der x und der y seien in der horizontalen Ebene angenommen, die Axe der z vertikal nach oben gerichtet; dann hat der Mittelpunkt M der Kugelfläche K die Coordinaten $x=0$, $y=0$, $z=\varepsilon\sqrt{(r_0^2-c^2)}$, indem ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem das Segment S gröfser oder kleiner ist als die halbe Fläche K. Die Beantwortung der im Eingange erwähnten beiden Fragen soll jetzt durch ein Verfahren vermittelt werden, das auf Veranlassung der zweiten Frage bei einem Leiter von beliebiger Form von *Green* angegeben und auch in dem angeführten Aufsatz erörtert ist. Es sei nämlich A ein aufserhalb des Segments S beliebig gelegener fester Punkt, in welchem die negative Einheit des electrischen Fluidums concentrirt sein möge, so besteht dies Verfahren darin, eine Potentialfunction v für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche S zu suchen, welche auf den Punkt B bezogen die Eigenschaft hat, gleich der reciproken Entfernung der Punkte B und A zu werden, sobald B ein Punkt der Fläche S ist, und zu verschwinden, sobald B sich von S unendlich weit entfernt. Durch den Ausdruck Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche S deute ich die Forderung an, dafs v im ganzen Raume mit Ausnahme dieser Fläche der *Laplace*schen Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

genüge und mit Einschlufs seiner nach jeder beliebigen Richtung genommenen ersten Differentialquotienten endlich und stetig sei. Nun existirt immer eine und zwar eine einzige Potentialfunction, welche jene aufgestellten Bedingungen erfüllt, und diese ist identisch mit dem Potential derjenigen Belegung von S, die durch den in A befindlichen Massenpunkt erregt ist und gebunden bleibt, wenn man nach vollendeter Induction den Leiter S mit einem andern Leiter von unendlich grofsen Dimensionen verbindet. Ist v gefunden, so erhält man

die Dichtigkeit ϱ der betreffenden Massenschicht im Punkte B von S durch die Relation

$$(2.)\qquad -4\pi\varrho = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r_0+\delta r_0} - \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r_0-\delta r_0},$$

wo der radius vector MB gleich r gesetzt ist, die neben den Klammern stehenden Ausdrücke die Werthe von r angeben, und δr_0 eine unendlich kleine positive Gröfse bedeutet. Da aber jede Belegung des Segments S als eine Belegung der Fläche K angesehen werden kann, bei welcher jeder aufserhalb S liegende Punkt die Dichtigkeit Null hat, so läfst sich die Gleichung (2.) durch die folgende einfachere ersetzen:

$$(2^*.)\qquad 4\pi\varrho = 2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r_0-\delta r_0} + \frac{1}{r_0}(v)_{r_0},$$

welche für jede beliebige Massenvertheilung auf der Kugelfläche und das von derselben herrührende Potential gilt *). Die zweite der aufgestellten Fragen ist somit erledigt.

Wenn der Punkt A mit dem Kugelmittelpunkt M zusammenfällt, so mufs v an der ganzen Fläche S gleich $\frac{1}{r_0}$, also constant sein. Die entsprechende Massenschicht ist alsdann identisch mit derjenigen, welche sich ohne Einwirkung äufserer Kräfte aus dem gleichen Quantum Electricität bildet; denn diese Vertheilung mufs für die ganze Fläche einen constanten Potentialwerth hervorbringen und ist durch diese Bedingung vollkommen bestimmt. Die dem Potentialwerth $\frac{1}{r_0}$ correspondirende Electricitätsmenge Q_M ist die Summe der betreffenden Dichtigkeit ϱ, also bekannt; soll daher die Vertheilung einer gegebenen Electricitätsmenge q ohne Action äufserer Kräfte bestimmt werden, worin die erste der aufgestellten Aufgaben besteht, so ist die Dichtigkeit gleich $\frac{q}{Q_M}\varrho$ und das Potential der Wirkung gleich $\frac{q}{Q_M}v$ zu nehmen, indem die Gröfsen ϱ und v sich auf die Lage des Punktes A in M beziehn. Hierbei kann bemerkt werden, dafs für jede Lage des Punktes A die Summe der Dichtigkeit ϱ mit Hülfe von v ohne Integralzeichen darstellbar ist. Benutzt man einen *Gaufs*ischen Satz **), bei dem zwei Belegungen derselben Fläche

---

*) S. *Dirichlet:* über einen neuen Ausdruck der Dichtigkeit einer unendlich dünnen Kugelschale etc. in den Abhandlungen der Berliner Academie vom Jahre 1850.

**) S. *Gaufs:* Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstofsungskräfte, art. 19.

betrachtet werden, und nimmt erstens die vom Punkte A herrührende Schicht ϱ_A mit dem Potential v_A, zweitens die vom Punkte M herrührende Schicht ϱ_M mit dem Potential v_M, so entsteht die Gleichung

$$\int \varrho_A v_M \partial k = \int \varrho_M v_A \partial k.$$

In derselben ist ∂k das Flächenelement von K, die Integration geht auf die Fläche S, die Werthe v_A und v_M sind so zu nehmen, dafs bei der Integration der Punkt B sich in S bewegt. Da nun für diese Fläche v_M constant gleich $\frac{1}{r_0}$, v_A gleich der reciproken Entfernung der Punkte B und A ist, so wird die linke Seite der Gleichung gleich der Electricitätsmenge $\int \varrho_A \partial k$ oder Q_A mal $\frac{1}{r_0}$, und die rechte Seite gleich dem Potential der Belegung ϱ_M in Bezug auf den Punkt A, d. h. gleich dem Werthe von v_M, sobald man den Punkt A für den Punkt B setzt. Bezeichnet man diesen Werth durch $v_{M,A}$, so kommt für die Electricitätsmenge Q_A die Gleichung

$$(3.)\qquad Q_A = r_0 v_{M,A},$$

die für jede Lage des Punktes A gilt.

Vor der Aufstellung des allgemeinen Ausdrucks für v ist es zweckmäfsig, an den besondern Fall, dafs das Segment S in die ganze Kugelfläche K übergeht, einige Bemerkungen anzuknüpfen. Bekanntlich gründet sich alsdann die Bestimmung des Potentials der durch einen electrischen Massenpunkt erregten Vertheilung auf einen geometrischen Satz, der folgendermafsen lautet:

Wenn der (inducirende) Punkt A mit dem Kugelmittelpunkt M durch eine gerade Linie verbunden und in dieser mit A auf derselben Seite von M ein Punkt A_1 so bestimmt wird, dafs das Product der Abstände MA und MA_1 gleich dem Quadrat des Radius r_0 ist, wenn ferner B irgend einen Punkt der Kugelfläche K bedeutet, so gilt die Proportion

$$(4.)\qquad BA : BA_1 = MA : r_0 = r_0 : MA_1.$$

Die übliche Auffassung des physikalischen Problems verlangt, dafs A im Raume aufserhalb K liege, dieser Satz ist aber an keine Beschränkung der Lage von A gebunden. Denn es leuchtet ein, dafs, wenn A im Raume aufserhalb K angenommen wird, A_1 einen bestimmten Punkt im Innern von K bezeichnet,



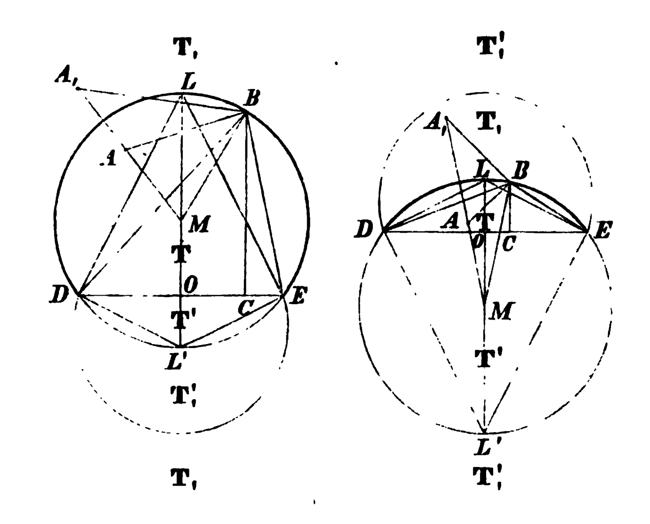
und dafs, wenn man diesen für A nimmt, der früher mit A bezeichnete Punkt die Rolle von A_1 spielt. Es wird nun im Folgenden nothwendig sein zu unterscheiden, ob ein innerhalb K befindlicher Punkt A über oder unter der Kreisfläche F liegt, und für die Lage des entsprechenden Punktes A_1 ein Merkmal zu besitzen. Ein solches liefert die leicht zu erweisende Bemerkung, dafs für jeden in der Fläche F angenommen Punkt A der zugehörige Punkt A_1 sich auf dem aufserhalb K fallenden Segment F_1 derjenigen Kugelfläche befindet, die durch den Punkt M und die das Segment S begrenzende Kreislinie hindurchgeht. Der bequemern Uebersicht wegen habe ich in den rechtsstehenden Figuren einen durch die verticale Linie MO geführten Durchschnitt des Raumes angedeutet; der ersten Figur liegt die Annahme zu Grunde, dafs S gröfser als die halbe Kugelfläche K, oder $\varepsilon = 1$ sei, der zweiten Figur die entgegenstehende Annahme, dafs $\varepsilon = -1$ sei, und ich werde mich im weitern Verlauf der Mittheilung durchgehends auf diese beiden Figuren beziehen. Es werde nun der durch die Fläche F und das Segment S eingeschlossene Raum mit T, der durch die Fläche F und das untere Segment von K eingeschlossene Raum mit T' bezeichnet; ferner heifse, wenn $\varepsilon = 1$ ist, der durch das untere Segment von K und das Segment F_1 begrenzte Raum T_1' und der übrig bleibende äufsere Raum T_1, dagegen heifse, wenn $\varepsilon = -1$ ist, der durch S und F_1 begrenzte Raum T_1 und der übrig bleibende äufsere Raum T_1'. Dann folgt aus dem Gesagten, dafs wenn man den Raum, in welchem der Punkt A angenommen wird, und den Raum, in welchen der zugehörige Punkt A_1 fällt, correspondirende nennt, die Räume T und T_1 und die Räume T' und T_1' durchaus mit einander correspondiren; und darin besteht das gesuchte Criterium.

Um die Gröfse v auszudrücken, benutze ich dieselben Coordinaten, welche in dem angeführten Aufsatz angewendet und mit den Buchstaben σ, μ, φ bezeichnet sind. Dieselben hängen mit den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z durch die Gleichungen

$$(5.)\qquad x = c\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi,\quad y = c\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}\sin\varphi,\quad z = \frac{c\sigma\mu}{i}$$

zusammen; σ ist gleich der imaginären Einheit $\sqrt{-1}$ oder i mal einer reellen Gröfse, die jeden zwischen Null und $+\infty$ liegenden Werth annimmt, μ wird zwischen den Grenzen -1 und $+1$, der Winkel φ zwischen den Grenzen

$-\pi$ und $+\pi$ vorausgesetzt, und die Quadratwurzeln $\sqrt{1-\sigma^2}$ und $\sqrt{1-\mu^2}$ sind stets positiv. Ich wiederhole jetzt folgende einfache Construction: von dem Punkte (σ, μ, φ) oder B (der in beiden Figuren in S angenommen ist) fälle ich auf die Ebene der x, y das Perpendikel BC, ziehe den Kreisdurchmesser $DOCE$, die Linien DB, EB und bezeichne den Winkel DBE durch ω, dann wird



$$(6.)\quad \begin{cases} DB = c\sqrt{1-\sigma^2}+c\sqrt{1-\mu^2}, & EB = c\sqrt{1-\sigma^2}-c\sqrt{1-\mu^2}, \\ \cos\tfrac{1}{2}\omega = \dfrac{\sigma}{i\sqrt{\mu^2-\sigma^2}}, & \sin\tfrac{1}{2}\omega = \dfrac{\pm\mu}{\sqrt{\mu^2-\sigma^2}}, \end{cases}$$

und es gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem μ positiv oder negativ ist, d. h. B oberhalb oder unterhalb F liegt. Wegen des Ausdrucks $c\sqrt{\mu^2-\sigma^2}$, der in der citirten Abhandlung als die mittlere Proportionale der Linien DB und EB aufgefafst ist*), kann die Bemerkung hinzugefügt werden, dafs, wenn man durch die Halbirungslinie des Winkels DBE eine gegen das Dreieck DBE senkrechte Ebene hindurchführt, und diese den begrenzenden Kreis in den Punkten G und H trifft**), die Linie $BG = BH = c\sqrt{\mu^2-\sigma^2}$ ist. Die Hälfte des Winkels GBH hat dann die trigonometrische Tangente $\frac{i}{\sigma}$.

Durch Einführung der Coordinaten σ, μ, φ nimmt die Bedingung dafür, dafs der Punkt B sich auf dem Segment S befinde, eine einfache Gestalt an. Setzt man $\sqrt{(r_0^2-c^2)} = cs_0 = \frac{c\sigma_0}{i}$, so hat der Kugelmittelpunkt M die Coordinaten $\sigma = \sigma_0$, $\mu = \varepsilon = \pm 1$ nach der obigen Unterscheidung, und das Quadrat der Linie MB wird gleich dem Ausdruck $c^2(1-\sigma_0^2-\sigma^2-\mu^2+2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu)$. Mithin ist die Gleichung, welche ausdrückt, dafs B ein Punkt der Kugelfläche

*) S. pag. 41 und 42 dieses Bandes.

**) Die Punkte G und H sind in den Figuren nicht angedeutet, da sie aufserhalb der vertikalen Ebene des Dreiecks DBE liegen.

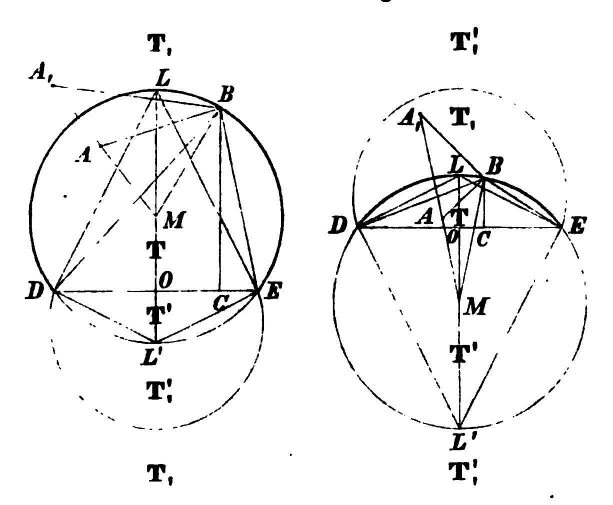
K ist, $\overline{BM}^2 = r_0^2$ oder die folgende

$$\sigma^2 + \mu^2 - 2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu = 0;$$

zerlegt man aber deren linke Seite in zwei nach σ und μ lineare Factoren, so entsteht

$$\sigma^2 + \mu^2 - 2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu = (\mu - (\varepsilon\sigma_0 - i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma)(\mu - (\varepsilon\sigma_0 + i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma),$$

und es tritt der Umstand hervor, dafs der erste Factor verschwindet, wenn B auf dem obern Segment S liegt, und dafs der zweite Factor verschwindet, wenn B auf dem untern Segment von K liegt. In der That ist nach (6.) die Gröfse $\frac{i\mu}{\sigma}$ gleich $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$ oder gleich $-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega$, je nachdem B oberhalb oder unterhalb F liegt; und verlängert man die vertikale Linie MO, bis sie das obere Segment S im Punkte L, das untere Segment von K im Punkte L' trifft, so ist für einen Punkt B, der sich in S befindet, der Winkel ω oder DBE constant gleich dem Winkel DLE, und für einen Punkt B, der sich im untern Segment befindet, der Winkel ω oder DBE constant gleich dem Winkel $DL'E$. Ferner ist die Linie $LO = c\sqrt{1-\sigma_0^2} + \frac{\varepsilon c\sigma}{i}$, die Linie $L'O = c\sqrt{1-\sigma_0^2} - \frac{\varepsilon c\sigma}{i}$, mithin die trigonometrische Tangente der Hälfte der Winkel DLE und $DL'E$ respective gleich $\sqrt{1-\sigma_0^2} - \frac{\varepsilon\sigma}{i}$ und $\sqrt{1-\sigma_0^2} + \frac{\varepsilon\sigma}{i}$. Also ist die Aussage gerechtfertigt, dafs für jeden Punkt B von S die Gleichung



$$(7.) \quad \mu - (\varepsilon\sigma_0 - i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma = 0$$

erfüllt ist, und für jeden Punkt B des andern Segments von K die Gleichung

$$(8.) \quad \mu - (\varepsilon\sigma_0 + i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma = 0.$$

Hieran schliefst sich die Bemerkung, dafs, weil nach (6.) die Gröfse $z = \frac{c\sigma\mu}{i}$ ist, sowohl σ als μ unter den Voraussetzungen, die für (7.) und (8.) gelten, durch $\sqrt{z}$ oder $\sqrt{-z}$ dargestellt werden können; aus der Gleichung (7.)

folgt nämlich

$$(7^*.)\quad \sigma = i\sqrt{(-\varepsilon i\sigma_0 + \sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)},\quad \mu = \sqrt{(\varepsilon i\sigma_0 + \sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)},$$

und aus der Gleichung (8.) ergiebt sich

$$(8^*.)\quad \sigma = i\sqrt{(\varepsilon i\sigma_0 + \sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{-z}{c}\right)},\quad \mu = -\sqrt{(-\varepsilon i\sigma + \sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{-z}{c}\right)}.$$

Dem Punkte A werden im Folgenden die Coordinaten $\sigma = \tau$, $\mu = \nu$, $\varphi = \psi$, und dem Punkte A_1, welcher nach der dem Satze (4.) zu Grunde liegenden Construction mit A correspondirt, die Coordinaten $\sigma = \tau_1$, $\mu = \nu_1$, $\varphi = \psi$ beigelegt werden; der Winkel φ hat offenbar für beide denselben Werth und ist deshalb durch denselben Buchstaben ψ bezeichnet. Den Punkten A und A_1 mögen ferner respective die rechtwinkligen Coordinaten (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) entsprechen. Um dann die Gröfsen τ_1 und ν_1 durch die Gröfsen τ und ν auszudrücken, werde von folgenden Gleichungen ausgegangen, welche die geometrische Betrachtung unmittelbar angiebt:

$$(9.)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r_0^2 x}{x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2},\quad y_1 = \dfrac{r_0^2 y}{x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2}, \\ z_1 - \varepsilon c s_0 = \dfrac{r_0^2(z-\varepsilon c s_0)}{x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (5.) bildet man durch Verwandlung von σ, μ, φ in τ, ν, ψ die Relation

$$(10.)\quad -c^2(\tau-\nu)^2 = x^2+y^2+(z+ic)^2,$$

welche die Stelle von zwei Gleichungen vertritt, indem bei der Vertauschung von i mit $-i$ die Gröfse τ in $-\tau$ zu verändern ist. Benutzt man diesen Umstand und fügt den Gröfsen τ, ν, x, y, z das Zeichen $_1$ bei, so kommt in gleicher Weise

$$(10^*.)\quad -c^2(\tau_1+\nu_1)^2 = x_1^2+y_1^2+(z_1-ic)^2.$$

Nun läfst sich der Ausdruck der rechten Seite, wie folgt, darstellen:

$$x_1^2+y_1^2+(z_1-ic)^2 = x_1^2+y_1^2+(z_1-\varepsilon c s_0)^2+2(z_1-\varepsilon c s_0)(\varepsilon c s_0-ic)^2+(\varepsilon c s_0-ic)^2,$$

und wird daher durch Einsetzung der Werthe $\dfrac{c^2(s^2+1)(z-\varepsilon c s_0)}{x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2} = z_1 - \varepsilon c s_0$ und $\dfrac{c^4(s^2+1)^2}{x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2} = x_1^2+y_1^2+(z_1-\varepsilon c s_0)^2$ so umgeformt, dafs nach dem Herausheben des Factors $(\varepsilon c s_0 - ic)^2$ die drei Terme sich in einen zusammenziehen, und folgende Gestalt hervorgeht:

$$x_1^2+y_1^2+(z_1-ic)^2 = \frac{(\varepsilon c s_0-ic)^2[x^2+y^2+(z+ic)^2]}{x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2}.$$

Vermöge der Gleichung (10.) wird aber hieraus

$$(\tau_1+\nu_1)^2 = \frac{-c^2(1+\varepsilon i s_0)^2(\tau-\nu)^2}{x^2+y^2+(z-\varepsilon i s_0)^2};$$

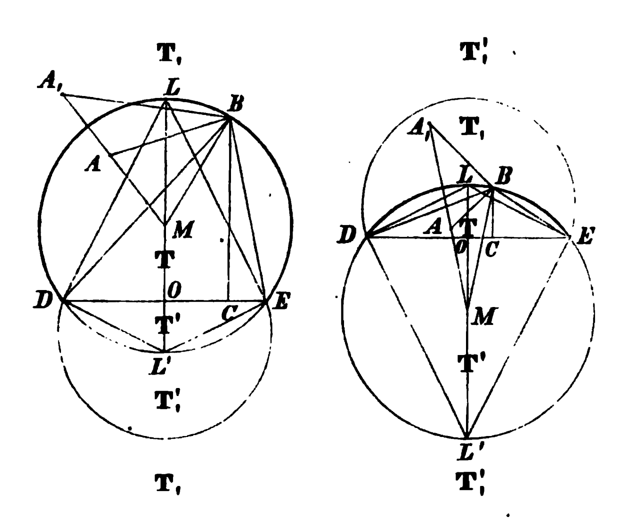
schreibt man nun σ_0 für is_0 und $c^2(1-\sigma_0^2-\tau^2-\nu^2+2\varepsilon\sigma_0\tau\nu)$ für $x^2+y^2+(z-\varepsilon c s_0)^2$, und zieht auf beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel aus, so entsteht die Relation

$$(11.)\qquad \tau_1+\nu_1 = \frac{\mp i(1+\varepsilon\sigma_0)(\tau-\nu)}{\sqrt{(1-\sigma_0^2-\tau^2-\nu^2+2\varepsilon\sigma_0\tau\nu)}},$$

welche für τ_1 und ν_1 die gesuchten Darstellungen durch τ und ν in folgender Weise liefert:

$$(12.)\qquad \tau_1 = \frac{\pm i(-\varepsilon\sigma_0\tau+\nu)}{\sqrt{(1-\sigma_0^2-\tau^2-\nu^2+2\varepsilon\sigma_0\tau\nu)}},\qquad \nu_1 = \frac{\pm i(\varepsilon\sigma_0\nu-\tau)}{\sqrt{(1-\sigma_0^2-\tau^2-\nu^2+2\varepsilon\sigma_0\tau\nu)}}.$$

Das Vorzeichen in (11.) und (12.) ist so zu bestimmen, dafs, wenn die Gröfsen τ und ν alle ihnen zustehenden Werthe durchlaufen, die Gröfse $\frac{\tau_1}{i}$ niemals negativ wird. Mithin ist das Vorzeichen der Gröfse $(-\varepsilon\sigma_0\tau+\nu)$ das entscheidende, da die Quadratwurzelgröfse im Nenner als stets positiv betrachtet wird, und man hat dasselbe für jede Lage des Punktes A oder (τ, ν, ψ) auszumitteln. Liegt A in der Fläche F, so ist $\tau=0$ und ν positiv oder negativ, je nachdem dieser Punkt zum Raume T oder zum Raume T' gerechnet wird. Für $\varepsilon=1$ bleibt der Ausdruck $-\sigma_0\tau+\nu$ positiv, so lange ν positiv ist, d. h. so lange A oberhalb F liegt, er ist negativ, wenn A in dem Raume liegt, den die Fläche F und diejenige Fläche, für welche $-\sigma_0\tau+\nu$ verschwindet, begrenzen, und wird wieder positiv, wenn sich A aufserhalb dieses Raumes befindet. Für $\varepsilon=-1$ bleibt dagegen der Ausdruck $+\sigma_0\tau+\nu$ negativ, so lange ν negativ ist, d. h. so lange A unterhalb F liegt, er ist positiv, wenn A in dem Raume liegt, den die Fläche F und diejenige Fläche, für welche $+\sigma_0\tau+\nu$ verschwindet, begrenzen, und wird wieder negativ, wenn sich A aufserhalb dieses Raumes befindet. Die Gleichung $-\varepsilon\sigma_0\tau+\nu=0$



bezeichnet aber, wie leicht einzusehen, diejenige Fläche, die vorhin F_1 genannt worden ist, und der Raum, welchen F und F_1 einschliefsen, besteht nach der eingeführten Bezeichnung, wenn $\varepsilon = +1$ ist, aus den Räumen T' und T'_1, und wenn $\varepsilon = -1$ ist, aus den Räumen T und T_1. Demnach bildet sich für die Gleichungen (11.) und (12.) die Regel, dafs in denselben das obere Zeichen gilt, wenn A in den Räumen T oder T_1 befindlich ist, und das untere Zeichen, wenn A in den Räumen T' oder T'_1 liegt, und die Gröfsen τ_1 und ν_1 sind somit vollständig bestimmte Functionen der Gröfsen τ und ν.

Da es wünschenswerth ist, für die Verbindungslinien der Punkte B, M mit den Punkten A, A_1 abgekürzte Ausdrücke zu haben, setze ich

$$\overline{BA}^2 = c^2 N, \qquad \overline{BA_1}^2 = c^2 N_1,$$
$$\overline{MA}^2 = c^2 n, \qquad \overline{MA_1}^2 = c^2 n_1,$$

und in Folge dessen

$$N = 2-\sigma^2-\mu^2-\tau^2-\nu^2+2\sigma\mu\tau\nu-2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-\nu^2}\cos(\varphi-\psi),$$
$$N_1 = 2-\sigma^2-\mu^2-\tau_1^2-\nu_1^2+2\sigma\mu\tau_1\nu_1-2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\tau_1^2}\sqrt{1-\nu_1^2}\cos(\varphi-\psi),$$
$$n = 1-\sigma_0^2-\tau^2-\nu^2+2\varepsilon\sigma_0\tau\nu,$$
$$n_1 = 1-\sigma_0^2-\tau_1^2-\nu_1^2+2\varepsilon\sigma_0\tau_1\nu_1.$$

Alsdann hat die gesuchte Potentialfunction v, bezogen auf den Punkt B oder (σ, μ, φ), folgende Gestalt:

(I.) A im Raume T,

B im Raume T, $$v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}\right\},$$

B aufserhalb T, $$v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}\right\};$$

(II.) A im Raume T_1,

B im Raume T, $$v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}\right\},$$

B aufserhalb T, $$v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}\right\};$$

(III.) A im Raume T' oder T'_1,

B im Raume T, $$v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}\right\},$$

B aufserhalb T, $$v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}\right\}.$$

Der Fall, dafs der Punkt A mit dem Kugelmittelpunkte M zusammentrifft, ist hier ausgeschlossen und später zu erörtern; die Werthe der Function arctg. sind hier und überall im Folgenden zwischen den Grenzen Null und π zu wählen.

Da nach dem oben Gesagten nur eine einzige Function existirt, welche den für v aufgestellten Bedingungen genügt, so hat man nur zu zeigen, dafs die in den vorstehenden Gleichungen für v angegebenen Ausdrücke denselben in der That genügen, und die Richtigkeit dieser Gleichungen ist strenge erwiesen. Dieses Ziel lassen die folgenden Betrachtungen erreichen.

1. Es ist gezeigt worden *), dafs der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$, als Function der Gröfsen σ, μ, φ aufgefafst, eine Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche F ist, welche verschwindet, wenn der Punkt (σ, μ, φ) sich von F unendlich weit entfernt. Aus diesem Grunde und wegen der bekannten Eigenschaften der Gröfse $\frac{1}{\sqrt{N}}$ ist der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu} = \frac{\pi}{\sqrt{N}} - \frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ eine, bei unendlicher Entfernung des Punktes (σ, μ, φ) von F, verschwindende Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche F und mit Ausschlufs des Innern einer um den Punkt A mit beliebig kleinem Radius beschriebenen Kugel. Befindet sich nun zunächst der Punkt A im Raume T, so wird eine Function des Punktes (σ, μ, φ) oder B, die innerhalb T gleich $\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ und aufserhalb T gleich $\frac{1}{\sqrt{N}} \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$, eine Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche S sein, wenn es feststeht, dafs an der Fläche F weder für sie selbst noch für ihre ersten Differentialquotienten eine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt. Es kann nämlich eine solche nur entweder bei dem Durchgang durch die Fläche F oder bei dem Durchgang durch die Fläche S vorkommen, weil jeder der beiden genannten Ausdrücke für den Raum, in welchem er gelten soll, Potentialfunction ist. Denn die Flächen F und S bilden zwischen diesen Räumen die Grenze und nach der gemachten Annahme können die Punkte B und A nur im Raume T, niemals aufserhalb desselben zusammenfallen. Um jetzt zu zeigen, dafs die oberhalb und unterhalb F herrschenden Werthe der in Rede stehenden Function sich nach der

*) S. pag. 39 dieses Bandes, wo die Buchstaben σ, μ, φ dieselbe Bedeutung haben, die Buchstaben σ', μ', φ' aber respective durch τ, ν, ψ zu ersetzen sind.

Stetigkeit an einander anschliefsen, betrachte man einen beliebigen Punkt $(\bar{\sigma}, \bar{\mu}, \bar{\varphi})$, der im Raume T der Fläche F nahe liegt, und den ebensoweit von F abstehenden Punkt im Raume T', nämlich $(\bar{\sigma}, -\bar{\mu}, \bar{\varphi})$; dann ist $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ eine kleine Gröfse, die Werthe $\bar{\mu}$ und $\bar{\varphi}$ bleiben aber unbeschränkt. Man gelangt von dem ersten Punkt zu dem zweiten, indem man in T die Werthe $\bar{\mu}$ und $\bar{\varphi}$ festhält und den Werth $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ bis zur Null abnehmen läfst, dann wieder in T' die Werthe $-\bar{\mu}$ und $\bar{\varphi}$ festhält und den Werth $\frac{\sigma}{i}$ von der Null bis zur Gröfse $\frac{\bar{\sigma}}{i}$ wachsen läfst. Geschieht dies beziehungsweise in den Ausdrücken $\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ und $\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$, so ist der Erfolg bei dem zweiten derselbe, als wenn in dem ersten Ausdruck die Werthe $\bar{\mu}$ und $\bar{\varphi}$ ungeändert blieben und die Variable $\frac{\sigma}{i}$ nach Erreichung des Werthes Null von diesem bis zu dem Werthe $-\frac{\bar{\sigma}}{i}$ stetig fortschritte. Daraus aber kann der stetige Zusammenhang der beiden Ausdrücke, sie selbst und ihre Differentialquotienten betreffend, geschlossen werden, und die Function, welche ihnen respective in T und T' gleich ist, gewinnt den Character einer Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche S, die in unendlicher Entfernung von der Fläche F oder, was gleichbedeutend ist, von der Fläche S verschwindet. Ist dagegen der Punkt A aufserhalb des Raumes T befindlich, so wird durch genau dieselbe Erwägung eine Function des Punktes B, die innerhalb T gleich $\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ und aufserhalb T gleich $\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ ist, als eine Potentialfunction von denselben Eigenschaften erkannt.

2. Bemerkt man, dafs die Ausdrücke $\frac{1}{\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}$ und $\frac{1}{\sqrt{N_1}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}$ in Beziehung auf den Punkt A_1 oder (τ_1, ν_1, ψ) und den Punkt B oder (σ, μ, φ) ganz dieselben sind wie die Ausdrücke $\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ und $\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ respective in Beziehung auf den Punkt A oder (τ, ν, ψ) und denselben Punkt B, so erhellt, dafs die in (I.), (II.), (III.) für v aufgestellten Werthe immer Aggregate von zwei Potentialfunctionen des in 1. bezeichneten Characters sind, deren jede mit einem von σ, μ, φ unabhängigen Factor multiplicirt ist. Folglich ist auch jeder der für

v aufgestellten Werthe in Bezug auf den Punkt B eine Potentialfunction für den ganzen Raum mit Ausnahme der Fläche S, die bei unendlicher Entfernung des Punktes B von S verschwindet.

3. Es bleibt mithin nur noch der Nachweis zu führen, dafs, wenn der Punkt B in das leitende Segment S eintritt, diese Werthe sich auf die reciproke Entfernung der Punkte B und A, d. i. auf die Gröfse $\frac{1}{c\sqrt{N}}$ reduciren. Dann erfüllen die Coordinaten σ und μ des Punktes B die aufgestellte Gleichung (7.)

$$\mu-(\varepsilon\sigma_0-i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma = 0,$$

und unter dieser Annahme sind die Ausdrücke N_1 und $-\sigma\tau_1+\mu\nu_1$ durch die Gröfsen τ, ν darzustellen, wozu die Gleichungen (11.) und (12.) dienen. Der specielle Werth N_1 wird bequemer ohne Rechnung gefunden, indem man den auf derselben Voraussetzung beruhenden Satz (4.) in die analytischen Zeichen

$$(13.)\qquad c\sqrt{N}:c\sqrt{N_1} = c\sqrt{n}:c\sqrt{1-\sigma_0^2} = c\sqrt{1-\sigma_0^2}:c\sqrt{n_1}$$

kleidet. Um den Ausdruck $-\sigma\tau_1+\mu\nu_1$ umzuformen, zieht man aus der Gleichung (7.) den Schlufs, dafs

$$\frac{\sigma-\mu}{\sigma+\mu} = \frac{1-\varepsilon\sigma_0+i\sqrt{1-\sigma_0^2}}{1+\varepsilon\sigma_0-i\sqrt{1-\sigma_0^2}} = \frac{i\sqrt{1-\sigma_0^2}}{1+\varepsilon\sigma_0}$$

ist, und multiplicirt die linke Seite der Gleichung (11.) mit $(\sigma-\mu)$, die rechte Seite mit $\frac{i\sqrt{1-\sigma_0^2}}{1+\varepsilon\sigma_0}(\sigma+\mu)$. Dann hebt sich die Gröfse $(1+\varepsilon\sigma_0)$ fort und es kommt die Gleichung

$$(14.)\qquad (\tau_1+\nu_1)(\sigma-\mu) = \frac{\pm\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}(\tau-\nu)(\sigma+\mu),$$

welche durch Sonderung des Reellen und des Imaginären in die beiden folgenden zerfällt

$$(15.)\qquad \begin{cases} -\sigma\tau_1+\mu\nu_1 = \dfrac{\pm\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}(-\sigma\tau+\mu\nu), \\ -\sigma\nu_1+\mu\tau_1 = \dfrac{\mp\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}(-\sigma\nu+\mu\tau). \end{cases}$$

Das Zeichen $\pm$ ist hier ebenso wie in den Gleichungen (11.) und (12.) zu nehmen, d. h. es gilt in den vorstehenden Gleichungen das obere Zeichen, wenn der Punkt A in den Räumen T oder T_1 liegt, und das untere Zeichen, wenn A sich in den Räumen T' oder T_1' befindet. Man schliefst nun aus den Gleichungen (13.) und (15.), dafs, wenn der Punkt B sich auf dem Segment S

befindet, der Ausdruck $\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1}}$ gleich $\frac{1}{\sqrt{N}}$, und der Ausdruck $\frac{\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}$ gleich $\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ oder gleich $\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}$ wird, je nachdem der Punkt A in den Räumen T und T_1 oder in den Räumen T' und T'_1 gelegen ist. Deshalb gehen die für v angegebenen Ausdrücke in den drei gesonderten Fällen, sowohl wenn der Punkt B vom Raume T aus, als auch wenn der Punkt B vom Raume T' aus an die Fläche S herantritt, in den Werth

$$\frac{1}{\pi c}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}+\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}\right)=\frac{1}{c\sqrt{N}}$$

über, welchen die Potentialfunction v in der Fläche S annehmen soll; und damit ist die Verification der Gleichungen (I.), (II.), (III.) ausgeführt *).

In diesen Gleichungen ist das Zusammenfallen der Punkte A und M ausgeschlossen, weil dann der zugehörige Punkt A_1 in unendliche Ferne rückt; nähert man aber den Punkt A dem Punkte M, so convergirt auch der Werth v gegen eine feste Grenze und diese entspricht der Annahme, dafs A und M derselbe Punkt sind. Um diesen Werth von v zu erhalten, ist für $\varepsilon=1$ die Gleichung (I.), für $\varepsilon=-1$ die Gleichung (III.) zu benutzen, da M respective bei $\varepsilon=1$ und bei $\varepsilon=-1$ in den Räumen T und T' liegt. Wenn nun der Punkt A_1 sich immer weiter von S entfernt, so wächst die Gröfse $\frac{\tau_1}{i}$ über jeden gegebenen Werth, die Gröfsen ν_1 und ψ bleiben aber innerhalb ihrer endlichen Grenzen. Es gehen die Ausdrücke $\frac{i\sqrt{N_1}}{\tau_1}$ und $\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{N_1}}$ mit wachsendem τ_1 in die Einheit, der Ausdruck $\frac{\sqrt{N_1}}{-\sigma\tau_1+\mu\nu_1}$ geht in den Werth $\frac{i}{\sigma}$ über, also sind dieses die betreffenden Grenzwerthe für unendliche Entfernung des Punktes A_1 von der Fläche S. An die Stelle von τ, ν sind die Werthe σ_0, ε zu setzen, und die Gröfse N wird von den Winkeln φ und ψ unabhängig, nämlich gleich dem Ausdruck $1-\sigma_0^2-\sigma^2-\mu^2+2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu$; so entstehen für v zwei verschiedene Ausdrücke, je nachdem $\varepsilon=1$ oder $\varepsilon=-1$ ist, welche in der folgenden Formel zusammengefafst sind:

---

*) *Green* hat Bd. XLIV, pag. 370 dieses Journals für jede Form des Leiters erwiesen, dafs der Werth v ungeändert bleibt, wenn die Punkte A und B vertauscht werden; es scheint daher unnöthig, in diesem speciellen Falle auf diese Eigenschaft von v einzugehen.

(IV.) A im Kugelmittelpunkt M,

$$B \text{ im Raume } T, \quad v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{-\sigma_0\sigma+\varepsilon\mu}+\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{-i}{\sigma}\right)\right\},$$

$$B \text{ aufserhalb } T, \quad v = \frac{1}{\pi c}\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\varepsilon\sqrt{N}}{-\sigma_0\sigma+\varepsilon\mu}+\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{i}{\sigma}\right)\right\}.$$

Bei den für v aufgestellten und bewiesenen Ausdrücken erkennt man leicht, dafs, wenn der Punkt A einer der Flächen, welche die Räume T und T', T' und T_1', T_1' und T_1 trennen, von jeder der beiden Seiten genähert wird, die entsprechenden Werthe von v an der Fläche selbst zusammenfallen; in die Fläche S, welche T und T_1 sondert, darf der Punkt A vermöge der Natur der behandelten Aufgabe niemals eintreten. In gleicher Weise resultirt für v in dem Falle, dafs das Segment S gleich der halben Kugelfläche K wird, aus der Annahme $\varepsilon = 1$ und der Annahme $\varepsilon = -1$ dieselbe richtige Bestimmung, indem man den Werth $\sigma_0 = 0$ setzt. Besonders einfach wird der Werth v, wenn der Punkt A dem unteren Segment der Kugelfläche K angehört, d. h. wenn zwischen den Variabeln τ, ν die Gleichung

$$\nu - (\varepsilon\sigma_0 + i\sqrt{1-\sigma_0^2})\tau = 0$$

gilt, die durch Substitution der Gröfsen τ, ν für σ, μ aus (8.) folgt. Alsdann fallen die Punkte A und A_1 zusammen, und es ergiebt sich

$$(16.)\quad \begin{cases} \text{wenn } B \text{ im Raume } T \text{ liegt}, & v = \dfrac{2}{\pi c\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}, \\ \text{wenn } B \text{ aufserhalb } T \text{ liegt}, & v = \dfrac{2}{\pi c\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}. \end{cases}$$

Die Function v, welche jetzt für jede Lage des Punktes A gefunden ist, drückt nach dem Obigen das Potential derjenigen Belegung von S aus, die durch einen in A befindlichen, die negative Einheit der electrischen Materie enthaltenden Punkt erregt und gebunden wird. Die Dichtigkeit ϱ dieser Belegung, deren Kenntnifs ein Hauptziel unserer Untersuchung ist, wird aus der Gleichung (2 *.)

$$4\pi\varrho = 2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r_0-\delta r_0} + \frac{1}{r_0}(v)_{r_0}$$

abgeleitet. Da r die Linie MB bedeutet, so ist $\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r_0-\delta r_0}$ derjenige Werth von $\frac{\partial v}{\partial r}$, welcher entsteht, wenn man den Punkt B im Raume T an die Fläche S herantreten läfst, und zur Bildung dieses Ausdrucks sind die für den Raum T geltenden Werthe von v anzuwenden. Um nun eine Function der Variabeln σ, μ, φ

nach der Gröfse r zu differentiiren, ist zu bemerken, dafs der Winkel φ von r unabhängig ist und dafs, wenn die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes (σ, μ, φ) durch x, y, z bezeichnet werden, die Differentialquotienten $\frac{\partial\sigma}{\partial r}$ und $\frac{\partial\mu}{\partial r}$ folgende Werthe haben:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial r} = \frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{y}{r} + \frac{\partial\sigma}{\partial z}\frac{z-\varepsilon c s_0}{r},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial r} = \frac{\partial\mu}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{y}{r} + \frac{\partial\mu}{\partial z}\frac{z-\varepsilon c s_0}{r}.$$

Vermöge der Gleichungen (5.) werden hieraus die Bestimmungen:

$$c\frac{\partial\sigma}{\partial r} = \frac{(1-\sigma^2)(\sigma-\varepsilon\sigma_0\mu)}{(\mu^2-\sigma^2)\sqrt{(1-\sigma_0^2-\sigma^2-\mu^2+2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu)}},$$

$$c\frac{\partial\mu}{\partial r} = \frac{-(1-\mu^2)(\mu-\varepsilon\sigma_0\sigma)}{(\mu^2-\sigma^2)\sqrt{(1-\sigma_0^2-\sigma^2-\mu^2+2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu)}},$$

und für den vorliegenden Fall, dafs der Punkt B in S liegt, oder dafs

$$\mu - (\varepsilon\sigma_0 - i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma = 0$$

ist, nehmen sie folgende einfachere Form an:

$$(17.)\qquad c\frac{\partial\sigma}{\partial r} = \frac{i\mu(1-\sigma^2)}{\mu^2-\sigma^2},\qquad c\frac{\partial\mu}{\partial r} = \frac{i\sigma(1-\mu^2)}{\mu^2-\sigma^2}.$$

Der Kürze wegen sei

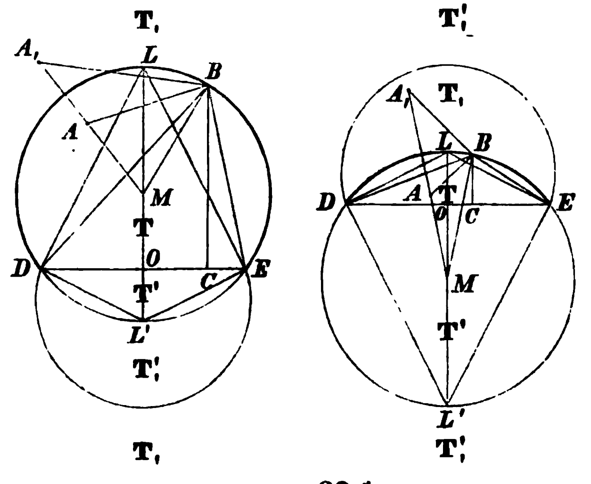
$$-\sigma\tau+\mu\nu = \zeta,\qquad -\sigma\tau_1+\mu\nu_1 = \zeta_1$$

gesetzt, dann ist behufs der Bildung von $\frac{\partial v}{\partial r}$ zunächst auf die beiden Ausdrücke

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta} + \frac{\zeta}{N(\zeta^2+N)}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial r} - \frac{1}{\zeta^2+N}\frac{\partial\zeta}{\partial r},$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta} - \frac{\zeta}{N(\zeta^2+N)}\right)\frac{1}{2}\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{\zeta^2+N}\frac{\partial\zeta}{\partial r}$$

zu achten. Den Differentialquotienten $\frac{\partial N}{\partial r}$ erhält man ohne Rechnung aus der Betrachtung des Dreiecks BMA, dessen Seite $BA = c\sqrt{N}$, dessen Seite $MA = c\sqrt{n}$ ist, und dessen Winkel BMA durch γ bezeichnet werden soll. Unter der besonderen hier geltenden Voraussetzung, dafs B dem Segment S angehört, findet sich



$$N = 1-\sigma_0^2-2\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{n}.\cos\gamma+n,$$

und

$$(18.)\qquad c\frac{\partial N}{\partial r} = 2(\sqrt{1-\sigma_0^2}-\sqrt{n}.\cos\gamma).$$

Für $\frac{\partial \zeta}{\partial r}$ aber geben die Gleichungen (17.) die Relation

$$c\frac{\partial\zeta}{\partial r} = \frac{i}{\mu^2-\sigma^2}(-(1-\sigma^2)\mu\tau+(1-\mu^2)\sigma\nu),$$

oder indem man $-\sigma\nu+\mu\tau=\eta$ setzt,

$$(19.)\qquad c\frac{\partial\zeta}{\partial r} = \frac{-i}{\mu^2-\sigma^2}(\eta+\sigma\mu\zeta).$$

Wird in den Gleichungen (18.) und (19.) τ, ν respective durch τ_1, ν_1 ersetzt, und schreibt man η_1 für $(-\sigma\nu_1+\mu\tau_1)$, so ergiebt sich

$$(20.)\qquad c\frac{\partial N_1}{\partial r} = 2(\sqrt{1-\sigma_0^2}-\sqrt{n_1}.\cos\gamma),$$

$$(21.)\qquad c\frac{\partial\zeta_1}{\partial r} = \frac{-i}{\mu^2-\sigma^2}(\eta_1+\sigma\mu\zeta_1),$$

und γ hat dieselbe Bedeutung wie vorhin, da die Winkel BMA und BMA_1 dieselben sind. Man substituire nun in die Ausdrücke

$$2c\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta}\Big)+\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta},$$

$$2c\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}\Big)+\frac{1}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}$$

die Werthe von $\frac{\partial N}{\partial r}$ und $\frac{\partial\zeta}{\partial r}$ aus (18.) und (19.), so geht nach einer kleinen Reduction der erste in die Gestalt

$$(22.)\qquad \frac{n-1+\sigma_0^2}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta}+\frac{2}{\zeta^2+N}\Big(\frac{(\sqrt{1-\sigma_0^2}-\sqrt{n}.\cos\gamma)\zeta}{N}+\frac{i(\eta+\sigma\mu\zeta)}{\mu^2-\sigma^2}\Big),$$

und der zweite in die Gestalt

$$(23.)\qquad \frac{n-1+\sigma_0^2}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}-\frac{2}{\zeta^2+N}\Big(\frac{(\sqrt{1-\sigma_0^2}-\sqrt{n}.\cos\gamma)\zeta}{N}+\frac{i(\eta+\sigma\mu\zeta)}{\mu^2-\sigma^2}\Big)$$

über. Alsdann werde in (22.) und (23.) τ, ν in τ_1, ν_1 verwandelt und der Factor $\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}=\frac{\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}$ hinzugefügt, so entstehen respective die beiden Ausdrücke

$$(24.)\ \frac{\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}\Big\{\frac{n_1-1+\sigma_0^2}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1^3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N_1}}{\zeta_1}+\frac{2}{\zeta_1^2+N_1}\Big(\frac{(\sqrt{1-\sigma_0^2}-\sqrt{n_1}.\cos\gamma)\zeta_1}{N_1}+\frac{i(\eta_1+\sigma\mu\zeta_1)}{\mu^2-\sigma^2}\Big)\Big\},$$

$$(25.)\ \frac{\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}\Big\{\frac{n_1-1+\sigma_0^2}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N_1^3}}\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N_1}}{\zeta_1}-\frac{2}{\zeta_1^2+N_1}\Big(\frac{(\sqrt{1-\sigma_0^2}-\sqrt{n_1}.\cos\gamma)\zeta_1}{N_1}+\frac{i(\eta_1+\sigma\mu\zeta_1)}{\mu^2-\sigma^2}\Big)\Big\}.$$

Ein Blick auf die Gleichungen (I.), (II.), (III.) zeigt nun, dafs das Aggregat $2\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_{r_0-\delta r_0}+\frac{1}{r_0}(v)_{r_0}$, welches den Werth $4\pi\varrho$ bestimmt, aus je zweien der Ausdrücke (22.), (23.), (24.), (25.) durch Addition erhalten wird. Da der Punkt B sich auf dem Segment S befindet, so ist die Voraussetzung erfüllt, unter welcher die Gleichungen (13.) und (15.) bestehen, und diese liefern zur Umformung von (24.) und (25.) diese Relationen:

$$\sqrt{N_1}=\frac{\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}\sqrt{N}=\frac{\sqrt{n_1}}{\sqrt{1-\sigma_0^2}}\sqrt{N},\quad \zeta_1=\frac{\pm\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}\zeta,\quad \eta_1=\frac{\mp\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}}\eta,$$

in denen das obere Zeichen oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem der Punkt A in den Räumen T und T_1 oder den Räumen T' und T_1' liegt. Mit Hülfe dieser Gleichungen gehen die Ausdrücke (24.) und (25.) beziehungsweise in die folgenden über:

$$(26.)\quad \frac{1-\sigma_0^2-n}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{\pm\sqrt{N}}{\zeta}\pm\frac{2}{\zeta^2+N}\left(\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{1-\sigma_0^2}.\cos\gamma)\sqrt{n}.\zeta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.N}+\frac{i(-\eta+\sigma\mu\zeta)}{\mu^2-\sigma^2}\right),$$

$$(27.)\quad \frac{1-\sigma_0^2-n}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N^3}}\operatorname{arctg}\frac{\mp\sqrt{N}}{\zeta}\mp\frac{2}{\zeta^2+N}\left(\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{1-\sigma_0^2}.\cos\gamma)\sqrt{n}.\zeta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.N}+\frac{i(-\eta+\sigma\mu\zeta)}{\mu^2-\sigma^2}\right),$$

wo das Vorzeichen der angegebenen Regel folgt. Zu addiren hat man im Falle von (I.) die Ausdrücke (22.) und (27.) mit dem obern Zeichen, im Falle von (II.) (23.) und (26.) mit dem obern Zeichen, im Falle von (III.) (23.) und (27.) mit dem untern Zeichen. So entsteht im Falle von (I.)

$$(28.)\quad \frac{1-\sigma_0^2-n}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N^3}}\left(-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta}+\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}\right)+\frac{2}{\zeta^2+N}\left(\frac{(1-\sigma_0^2-n)\zeta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.N}+\frac{2i\eta}{\mu^2-\sigma^2}\right),$$

und im Falle von (II.) und (III.)

$$(29.)\quad \frac{1-\sigma_0^2-n}{\sqrt{1-\sigma_0^2}\sqrt{N^3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta}-\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}\right)-\frac{2}{\zeta^2+N}\left(\frac{(1-\sigma_0^2-n)\zeta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.N}+\frac{2i\eta}{\mu^2-\sigma^2}\right).$$

Diese Aggregate zu vereinfachen dient die Bemerkung, dafs die Gröfse $1-\sigma_0^2-n$ gleich dem Product

$$(\nu-(\varepsilon\sigma_0-i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma)(\nu-(\varepsilon\sigma_0+i\sqrt{1-\sigma_0^2})\tau)$$

ist, und dafs dieselbe an dieser Stelle, weil die Gleichung $\frac{\mu}{\sigma}=\varepsilon\sigma_0-i\sqrt{1-\sigma_0^2}$ gilt, in die Form

$$\left(\nu-\frac{\mu}{\sigma}\tau\right)\left(\nu-\frac{\sigma}{\mu}\tau\right)=\frac{-\eta\zeta}{\sigma\mu}$$

übergeht; ferner ist hier $\frac{\mu}{\sigma}-\frac{\sigma}{\mu}=-2i\sqrt{1-\sigma_0^2}$, folglich $\frac{2i}{\mu^2-\sigma^2}=\frac{-1}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.\sigma\mu}$.

So ergiebt sich die Reduction

$$\frac{(1-\sigma_0^2-n)\zeta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.N}+\frac{2i\eta}{\mu^2-\sigma^2}=-\frac{\eta\zeta^2}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.\sigma\mu N}-\frac{\eta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.\sigma\mu}=-\frac{\eta}{\sqrt{1-\sigma_0^2}.\sigma\mu}.\frac{\zeta^2+N}{N},$$

vermöge deren in (28.) und (29.) der Nenner ζ^2+N herausgeht. Schreibt man jetzt für $\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{N}}{\zeta}$ den Werth $\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{\zeta}$, für ζ und η die ursprünglichen Ausdrücke $(-\sigma\tau+\mu\nu)$ und $(-\sigma\nu+\mu\tau)$, so folgt aus (28.) und (29.) diese Bestimmung der gesuchten Dichtigkeit ϱ:

(V.) wenn A im Raume T liegt,

$$\varrho=\frac{1}{2\pi^2c^2\sqrt{1-\sigma_0^2}}\left\{\frac{1-\sigma_0^2-n}{\sqrt{N^3}}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}\right)+\frac{\sigma\nu-\mu\tau}{\sigma\mu N}\right\};$$

(VI.) wenn A aufserhalb des Raumes T liegt,

$$\varrho=\frac{-1}{2\pi^2c^2\sqrt{1-\sigma_0^2}}\left\{\frac{1-\sigma_0^2-n}{\sqrt{N^3}}\left(\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{N}}{-\sigma\tau+\mu\nu}\right)+\frac{\sigma\nu-\mu\tau}{\sigma\mu N}\right\}.$$

Geht man auf diese Ausdrücke etwas näher ein, so wird klar, dafs ϱ für jeden Punkt der Fläche S einen positiven Werth erhält, und da im inducirenden Punkte A ein Quantum negativer Electricität concentrirt gedacht ist, so durfte die Dichtigkeit ϱ an keiner Stelle negativ werden. An dem Rande des Leiters, wo der Punkt B die Coordinaten $\sigma=0$, $\mu=0$ hat, wird ϱ unendlich grofs, und um die Art des Wachsens anschaulich zu machen kann man bemerken, dafs für Punkte der Fläche, die ihrem Rande nahe liegen, die Entfernung von diesem durch die Gröfse $\frac{zr_0}{c}=z\sqrt{1-\sigma_0^2}$ gemessen wird, und dafs mittelst der Gleichungen (7*.)

$$\sigma=i\sqrt{(-\varepsilon i\sigma_0+\sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)},\quad \mu=\sqrt{(\varepsilon i\sigma_0+\sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)}$$

die Gröfsen σ und μ ebenfalls durch z ausgedrückt werden. Daraus folgt, dafs das Product der Dichtigkeit ϱ in die Quadratwurzel aus dem Abstande des betreffenden Punktes von dem Rande des Kugelflächensegments S bei der Annäherung an den Rand einen festen Werth zur Grenze hat, oder dafs

$$\lim.\left[\varrho(z\sqrt{1-\sigma_0^2})^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\pm 1}{2\pi^2c(c\sqrt{1-\sigma_0^2})^{\frac{1}{2}}}.\frac{\nu\sqrt{(-\varepsilon i\sigma_0+\sqrt{1-\sigma_0^2})}-\tau\sqrt{(\varepsilon i\sigma_0+\sqrt{1-\sigma_0^2})}}{N}$$

ist, wo das obere Zeichen der Annahme von (V.), das untere Zeichen der Annahme von (VI.) entspricht.

Obgleich die Gleichungen (V.) und (VI.) aus den Gleichungen (I.), (II.), (III.) abgeleitet sind, in denen die Punkte A und M nicht zusammen-

fallen durften, so gelten dieselben auch für diese Voraussetzung; bei $\varepsilon = 1$ ist die Gleichung (V.), bei $\varepsilon = -1$ die Gleichung (VI.) anzuwenden. Es wird dann $\tau = \sigma_0$, $\nu = \varepsilon$, und wegen der Gleichung $\frac{\mu}{\sigma} = \varepsilon\sigma_0 - i\sqrt{1-\sigma_0^2}$ ferner $N = 1-\sigma_0^2$, $-\sigma_0\sigma + \varepsilon\mu = -i\varepsilon\sqrt{1-\sigma_0^2}.\sigma$, $-\varepsilon\sigma + \sigma_0\mu = -i\varepsilon\sqrt{1-\sigma_0^2}.\mu$; mithin kommt für $\varepsilon = 1$ und für $\varepsilon = -1$ dieselbe Gleichung

$$(30.) \qquad \varrho = \frac{1}{2\pi^2 c^2(1-\sigma_0^2)}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{i}{\sigma}\right) + \frac{i}{\sigma}\right).$$

Die Summe Q_A der Dichtigkeit ϱ, welche allgemein in (V.) und (VI.) dargestellt ist, wird nach der Gleichung (3.) gefunden, indem man das Potential $v_{M,A}$ mit dem Radius $r_0 = c\sqrt{1-\sigma_0^2}$ multiplicirt. Das Potential $v_{M,A}$ entsteht aber aus dem Ausdruck für v in der Gleichung (IV.), indem man den Punkt B durch den Punkt A, d. h. σ, μ respective durch τ, ν ersetzt. In jener Gleichung ist $N = 1-\sigma_0^2-\sigma^2-\mu^2+2\varepsilon\sigma_0\sigma\mu$ und geht deshalb in die Gröfse n über, mithin erhält man folgendes Resultat:

$$(31.) \quad \begin{cases} A \text{ im Raume } T, & Q_A = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{-\sigma_0\tau+\varepsilon\nu} + \operatorname{arctg}\left(\frac{-i}{\tau}\right)\right\}, \\ A \text{ aufserhalb } T, & Q_A = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\sqrt{1-\sigma_0^2}}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{-\sigma_0\tau+\varepsilon\nu} + \operatorname{arctg}\left(\frac{i}{\tau}\right)\right\}. \end{cases}$$

Die Summe Q_M derjenigen Dichtigkeit ϱ, die in (30.) angegeben ist, und die dem constanten Potentialwerth $\frac{1}{r_0} = \frac{1}{c\sqrt{1-\sigma_0^2}}$ entspricht, findet man jetzt, wenn man den Punkt A in den Punkt M übergehen, d. h. $\tau = \sigma_0$, $\nu = \varepsilon$ werden läfst. Da der Punkt M bei $\varepsilon = 1$ im Raume T, bei $\varepsilon = -1$ im Raume T' liegt, so ist die Grenze aufzusuchen, der sich der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{+\sqrt{n}}{-\sigma_0\tau+\varepsilon\nu}$ nähert, wenn der Punkt A dem Punkte M genähert wird; die Gröfse $\sqrt{n}$ nimmt alsdann ins Unendliche ab, die Gröfse $-\sigma_0\tau+\varepsilon\nu$ convergirt gegen den die Einheit übertreffenden Werth $1-\sigma_0^2$, also ist

$$\lim.\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{+\sqrt{n}}{-\sigma_0\tau+\varepsilon\nu}\right) = \frac{1}{1-\sigma_0^2}.$$

Folglich entstehen für Q_M, je nachdem $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = -1$ ist, zwei Werthe, die in der folgenden Gleichung enthalten sind:

$$(32.) \qquad Q_M = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-\sigma_0^2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{-\varepsilon i}{\sigma_0}\right)\right).$$

Q_M bezeichnet diejenige Menge freier Electricität, welche ohne Einwirkung äufserer Kräfte sich auf dem Leiter S so vertheilt, dafs die in (30.) ange-

gebene Dichtigkeit ϱ und das in (IV.) dargestellte Potential entsteht. Da nun die Vertheilung einer beliebigen Electricitätsmenge q unter denselben Verhältnissen, wie schon oben bemerkt, die Dichtigkeit $\frac{q}{Q_M}\varrho$ und das Potential $\frac{q}{Q_M}v$ hervorbringt, so liefern die genannten Gleichungen, verbunden mit der eben erhaltenen Gleichung (32.), eine vollständige Darstellung dieser Gröfsen.

Es bleibt nun übrig, diese Resultate mit der angenäherten Auflösung derselben Aufgabe zu vergleichen, welche *Green* gegeben hat. Die von ihm angewendete Methode stützt sich auf den Satz, dafs, wenn das Potential einer Belegung von S, welches sich in der Fläche selbst auf eine gegebene Constante reducirt, für jeden Punkt des andern Segments der Kugelfläche K bekannt ist, der Werth desselben für jeden Punkt des Raumes durch ein gewisses Doppelintegral ausgedrückt wird und somit als gefunden gelten darf. Wenn jetzt nach der eingeführten Bezeichnung $\varepsilon = 1$ und $\frac{c}{r_0}$ eine kleine Gröfse ist, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden, so erhält *Green* für den Werth des in Rede stehenden Potential im untern Segment von K das Product der gegebenen Constante in den Ausdruck

$$1-\frac{c}{\pi r_0}\left(1-\frac{x^2+y^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und es genügt, die Uebereinstimmung desselben mit den obigen Formeln nachzuweisen, um aus dem Gesagten auf die Uebereinstimmung aller bezüglichen Resultate zu schliefsen. Aus der Gleichung (IV.) folgt aber leicht, dafs das Potential, welches in S den constanten Werth $\frac{1}{c\sqrt{1-\sigma_0^2}} = \frac{1}{r_0}$ hat, in einem Punkte (σ, μ, φ) des untern Segments von K (wo die Gleichung

$$(8.)\qquad \mu-(\varepsilon\sigma_0+i\sqrt{1-\sigma_0^2})\sigma = 0$$

gilt) den Werth $\frac{2}{\pi c\sqrt{1-\sigma_0^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{i}{\sigma}\right)$ annimmt. Ferner ist nach (8*.) die Gröfse σ durch die Gleichung

$$\frac{\sigma}{i} = \sqrt{(i\sigma_0+\sqrt{1-\sigma_0^2})}\sqrt{\left(\frac{-z}{c}\right)}$$

bestimmt, da $\varepsilon = 1$ zu setzen ist. Drückt man σ_0 wieder durch r_0 aus, so kommt $i\sigma_0 = \frac{-\sqrt{(r_0^2-c^2)}}{c}$, $\sqrt{1-\sigma_0^2} = \frac{r_0}{c}$, und

$$\frac{\sigma}{i} = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{(r_0^2-c^2)}+r_0}{c}\right)}\sqrt{\left(\frac{-z}{c}\right)} = \left(\frac{-z}{r_0+\sqrt{(r_0^2-c^2)}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

aus der Gleichung

$$-z = \sqrt{(r_0^2 - x^2 - y^2)} - \sqrt{(r_0^2 - c^2)} = \frac{c^2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(r_0^2 - x^2 - y^2)} + \sqrt{(r_0^2 - c^2)}}$$

folgt dann endlich

$$\frac{\sigma}{i} = \left[\frac{c^2 - x^2 - y^2}{(r_0 + \sqrt{(r_0^2 - c^2)})(\sqrt{(r_0^2 - x^2 - y^2)} + \sqrt{(r_0^2 - c^2)})}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Da nun $\operatorname{arctg}\left(\frac{i}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sigma}{i}\right)$ ist, so darf dafür mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\frac{c}{r_0}$ der Werth $\frac{1}{2}\pi - \frac{\sigma}{i}$ oder der Werth

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{c}{2r_0}\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

eintreten; mithin bekommt bei dem für das Segment S vorgeschriebenen constanten Potentialwerth $\frac{1}{r_0}$ das Potential für die Punkte des andern Segments von K den angenäherten Werth $\frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{c}{\pi r_0}\left(1 - \frac{x^2 + y^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$, welcher der *Green*schen Angabe gemäfs ist, und das sollte festgestellt werden.

Bonn, den 11ten Mai 1860.

Ueber eine neue Eigenschaft der *Steiner*schen Gegenpunkte des *Pascal*schen Sechsecks.

(Von Herrn *Grofsmann* zu Schweidnitz.)

Die Berühmtheit, welche der *Pascal*sche Satz erlangt hat und der Umstand, dafs auch die bedeutendsten Mathematiker der Gegenwart es nicht verschmäht haben, sich mit jenem Satze von den verschiedensten Gesichtspunkten aus zu beschäftigen und ihn immer mehr zu erweitern, mag mich entschuldigen, wenn ich die Leser dieses Journals mit einer Eigenschaft der Sechsecke, welche einem Kegelschnitte eingeschrieben oder umgeschrieben sind, bekannt mache, welche, so weit mir die mathematische Literatur zu Gebote steht, noch nicht bemerkt zu sein scheint.

Auf einem Kegelschnitte seien zwei Gruppen von drei Punkten gegeben und mit 1, 2, 3 und 4, 5, 6 bezeichnet. Die Gleichungen der Verbindungslinien der ersten Gruppe seien

$$s_1 = 0; \quad s_2 = 0; \quad s_3 = 0,$$

und es verbinde s_1 die Punkte 2 und 3 etc. Die Gleichung jedes Kegelschnitts, der durch die Punkte 1, 2, 3 geht, läfst sich bekanntlich ausdrücken:

$$a_1 s_2 s_3 + a_2 s_3 s_1 + a_3 s_1 s_2 = 0;$$

in dieser Gleichung ist demnach auch der gegebene Kegelschnitt enthalten.

Werden nun die Punkte der ersten Gruppe mit den Punkten der zweiten Gruppe verbunden, so erhält man neun Verbindungslinien, welche sechs *Pascal*sche Sechsecke und zwei *Steiner*sche Gegenpunkte geben.

Drücken wir die Linien (14), (25), (36) aus durch

$$s_2 - \lambda_1 s_3 = 0; \quad s_3 - \lambda_2 s_1 = 0; \quad s_1 - \lambda_3 s_2 = 0,$$

so ergeben sich durch Combination dieser Gleichungen mit der Kegelschnittsgleichung und Elimination einer der Gröfsen s_1, s_2, s_3 die Gleichungen der übrigen sechs Verbindungslinien und zwar:

$$(24)\quad a_1\lambda_1 s_3 + (a_3\lambda_1 + a_2)s_1 = 0; \qquad (34)\quad a_1 s_2 + (a_3\lambda_1 + a_2)s_1 = 0;$$
$$(35)\quad a_2\lambda_2 s_1 + (a_1\lambda_2 + a_3)s_2 = 0; \qquad (15)\quad a_2 s_3 + (a_1\lambda_2 + a_3)s_2 = 0;$$
$$(16)\quad a_3\lambda_3 s_2 + (a_2\lambda_3 + a_1)s_3 = 0; \qquad (26)\quad a_3 s_1 + (a_2\lambda_3 + a_1)s_3 = 0.$$

Zur einfacheren Bezeichnung wollen wir nun mit $\begin{vmatrix}123\\456\end{vmatrix}$ diejenige *Pascal*sche Linie bezeichnen, welche die Durchschnittspunkte von (15) und (42); (26) und (53); (34) und (61) enthält; man sieht leicht, wie durch ein Verfahren, analog dem bei der Bildung der Determinanten, aus dieser Bezeichnung die Durchschnittspunkte, welche die Linie enthält, gefunden werden; es kommt nun darauf an die Gleichungen der *Pascal*schen Linien selbst zu finden. Legen wir eine Linie durch die Durchschnittspunkte (15)(42) und (26)(53); es wird sich sogleich herausstellen, dafs sie auch durch (34)(61) geht.

Eine Linie durch (15) und (42) hat aber die Form $(15)+\alpha(42)=0$ und diese mufs identisch sein mit $(26)+\beta(53)=0$. Werden nun α oder β bestimmt, so findet man

$$\alpha=\frac{a_2\lambda_2\lambda_3+a_1\lambda_2+a_3}{a_3\lambda_3\lambda_1+a_2\lambda_3+a_1} \quad \text{oder} \quad \beta=\frac{a_3\lambda_3\lambda_1+a_2\lambda_3+a_1}{a_1\lambda_1\lambda_2+a_3\lambda_1+a_2}.$$

Bezeichnen wir die Zähler und Nenner dieser Brüche, entsprechend den von λ freien Gliedern, mit A_1, A_2, A_3, so dafs $\alpha=\frac{A_3}{A_1}$, $\beta=\frac{A_1}{A_2}$ wird, so finden zwischen den Gröfsen A folgende Relationen statt, welche sich leicht beweisen lassen:

$$\begin{array}{lll}
A_1(a_1\lambda_2+a_3)=a_3\lambda_3A_2+a_1A_3 & \text{oder} & a_3A_1-a_1A_3=a_3\lambda_3A_2-a_1\lambda_2A_1,\\
A_2(a_2\lambda_3+a_1)=a_1\lambda_1A_3+a_2A_1 & - & a_1A_2-a_2A_1=a_1\lambda_1A_3-a_2\lambda_3A_2,\\
A_3(a_3\lambda_1+a_2)=a_2\lambda_2A_1+a_3A_2 & - & a_2A_3-a_3A_2=a_2\lambda_2A_1-a_3\lambda_1A_3.
\end{array}$$

Nach diesen Vorbereitungen wird nun die Gleichung der Linie

$$\begin{vmatrix}123\\456\end{vmatrix} \quad (a_3\lambda_1+a_2)A_3s_1+(a_1\lambda_2+a_3)A_1s_2+(a_2\lambda_3+a_1)A_2s_3 = 0$$

oder mit Benutzung der angegebenen Relationen:

$$(a_2\lambda_2A_1+a_3A_2)s_1+(a_3\lambda_3A_2+a_1A_3)s_2+(a_1\lambda_1A_3+a_2A_1)s_3 = 0.$$

Dies ist nach der Herleitung nur die Linie, welche den Punkt (15)(42) mit (26)(53) verbindet; da der Ausdruck derselben bei cyclischer Vertauschung der Indices ungeändert bleibt, so geht die Linie auch durch den Punkt (34)(61).

Bestimmen wir die übrigen *Pascal*schen Linien auf ganz ähnliche Weise und ordnen die Gleichungen übersichtlich, so finden wir:

$$\begin{array}{lllll}
\begin{vmatrix}123\\645\end{vmatrix} & a_3A_2s_1 & +a_1A_3s_2 & +a_2A_1s_3 & =0,\\
\begin{vmatrix}123\\456\end{vmatrix} & -(a_3\lambda_3A_2+a_1A_3)s_2 & -(a_1\lambda_1A_3+a_2A_1)s_3 & -(a_2\lambda_2A_1+a_3A_2)s_1 & =0,\\
\begin{vmatrix}123\\564\end{vmatrix} & a_1\lambda_1A_3s_3 & +a_2\lambda_2A_1s_1 & +a_3\lambda_3A_2s_2 & =0,
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}123\\654\end{vmatrix} \quad a_3A_2s_1-(a_3\lambda_3A_2+a_1A_3)s_2+a_1\lambda_1A_3s_3 = 0,$$

$$\begin{vmatrix}123\\465\end{vmatrix} \quad a_1A_3s_2-(a_1\lambda_1A_3+a_2A_1)s_3+a_2\lambda_2A_1s_1 = 0,$$

$$\begin{vmatrix}123\\546\end{vmatrix} \quad a_2A_1s_3-(a_2\lambda_2A_1+a_3A_2)s_1+a_3\lambda_3A_2s_2 = 0.$$

Man sieht sogleich, dafs die ersten drei dieser Linien sich in einem Punkte schneiden, da die Summe ihrer Gleichungen identisch Null wird; ebenso die Linien der zweiten Gruppe. Diese beiden Durchschnittspunkte sind die *Steiner*schen Gegenpunkte.

Zugleich zeigt sich, dafs beide Gruppen aus denselben Gliedern bestehen; nur stehen die Glieder, welche in der einen Gruppe eine Reihe bilden, bei der andern Gruppe in einer Colonne.

(Welche geometrische Bedeutung haben die drei sich auch in einem Punkte $a_1a_2a_3$ schneidenden Linien, deren Gleichungen durch dieselben Glieder gebildet werden, wenn sie nach der Richtung der Diagonalen gruppirt werden?)

Die Coordinaten der *Steiner*schen Punkte seien nun s'_1, s'_2, s'_3 und s''_1, s''_2, s''_3; werden dieselben aus den Gleichungen der *Pascal*schen Linien bestimmt, so erhält man aus der ersten Gruppe:

$$s'_1:s'_2:s'_3 = \lambda_3a_2a_3A_1A_2-\lambda_1a_1^2A_3^2:\lambda_1a_3a_1A_2A_3-\lambda_2a_2^2A_1^2:\lambda_2a_1a_2A_3A_1-\lambda_3a_3^2A_2^2$$

und aus der zweiten Gruppe:

$$s''_1:s''_2:s''_3 = a_1a_2A_1A_3+\lambda_3a_3a_2A_1A_2+\lambda_1\lambda_3a_3a_1A_2A_3:a_2a_3A_2A_1+\lambda_1a_1a_3A_2A_3$$
$$+\lambda_2\lambda_1a_1a_2A_3A_1:a_3a_1A_3A_2+\lambda_2a_2a_1A_3A_1+\lambda_3\lambda_2a_2a_3A_1A_2.$$

Da nur die Verhältnisse der Werthe, welche s_1, s_2, s_3 annehmen, wenn die Coordinaten der *Steiner*schen Punkte eingesetzt werden, hier in Betracht kommen, so kann man für s'_1 etc. die entsprechenden Glieder der Proportionen nehmen. Bilden wir nun $s''_1-s'_1$; $s''_2-s'_2$ u. s. w., so finden wir mit Berücksichtigung der früher aufgestellten Relationen zwischen den Gröfsen A_1, A_2, A_3:

$$s''_1-s'_1=a_1A_1A_2A_3; \qquad s''_2-s'_2=a_2A_1A_2A_3; \qquad s''_3-s'_3=a_3A_1A_2A_3;$$

oder

$$s''_1=s'_1+a_1A_1A_2A_3; \qquad s''_2=s'_2+a_2A_1A_2A_3; \qquad s''_3=s'_3+a_3A_1A_2A_3.$$

Die Gleichung der Verbindungslinie beider Punkte ist aber bekanntlich folgende Determinante:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s'_1 & s'_2 & s'_3 \\ s''_1 & s''_2 & s''_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder, wenn die Werthe für s_1'', s_2'', s_3'' eingesetzt werden und die Determinante zerlegt wird:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1' & s_2' & s_3' \\ s_1' & s_2' & s_3' \end{vmatrix} + A_1 A_2 A_3 \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1' & s_2' & s_3' \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Da nun die erste Determinante identisch Null ist, so bleibt als Gleichung der Verbindungslinie der beiden *Steiner*schen Punkte:

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1' & s_2' & s_3' \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir sehen hieraus, dafs diese Verbindungslinie durch einen Punkt $a_1 a_2 a_3$ ***geht, der von den Werthen der Gröfsen*** λ ***unabhängig ist. Der Punkt*** $a_1 a_2 a_3$ ***ist aber der Punkt, in welchem diejenigen Linien sich schneiden, welche die Punkte*** 1, 2, 3 ***mit den Durchschnittspunkten der Tangenten respective in*** 2, 3; 3, 1 ***und*** 1, 2 ***verbinden.***

Bleiben also die Punkte einer Gruppe fest, so geht die Verbindungslinie der Steinerschen Punkte stets durch einen festen Punkt.

Ebenso könnte man aber auch die zweite Gruppe, nämlich die Punkte 4, 5, 6 zu Grunde legen. Der Kegelschnitt sei alsdann $b_1 t_2 t_3 + b_2 t_3 t_1 + b_3 t_1 t_2 = 0$; dann geht die Verbindungslinie der *Steiner*schen Punkte auch durch den Punkt $b_1 b_2 b_3$.

Sechs Punkte auf dem Kegelschnitt lassen sich aber auf zehn verschiedene Weisen in zwei Gruppen von drei Punkten zerlegen; also erhalten wir zehn Paare von solchen Punkten.

Die Polare des *Steiner*schen Punktes $s_1' s_2' s_3'$ ist

$$(a_3 s_2' + a_2 s_3') s_1 + (a_1 s_3' + a_3 s_1') s_2 + (a_2 s_1' + a_1 s_2') s_3 = 0,$$

diejenige des Punktes $s_1'' s_2'' s_3''$ ergiebt sich leicht

$$(a_3 s_2' + a_2 s_3') s_1 + (a_1 s_3' + a_3 s_1') s_2 + (a_2 s_1' + a_1 s_2') s_3 + a_1 a_2 a_3 A_1 A_2 A_3 \left(\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3}\right) = 0,$$

die Polare des Punktes $a_1 a_2 a_3$ ist aber $\frac{s_1}{a_1} + \frac{s_2}{a_2} + \frac{s_3}{a_3} = 0$; es schneiden sich mithin diese drei Linien wieder in einem Punkte, was sich auch geometrisch ohne weiteres folgern liefs.

Die Polaren der *Steiner*schen Punkte, welche bekanntlich zugeordnete Pole des Kegelschnitts sind, schneiden sich mithin stets auf einer Linie, die unabhängig von λ, also der Lage der zweiten Gruppe, ist.



Den bewiesenen Satz kann man demnach folgendermafsen aussprechen:

Werden auf einem Kegelschnitte zwei Gruppen von drei Punkten angenommen und die Punkte der ersten Gruppe mit sämmtlichen Punkten der zweiten Gruppe verbunden, so lassen sich die neun Verbindungslinien zu sechs Sechsecken zusammenstellen, zu denen sechs *Pascal*sche Linien gehören, die sich in zwei *Steiner*schen Punkten schneiden. *Die Verbindungslinie der beiden Steinerschen Punkte geht stets durch die beiden Punkte, in denen sich die Verbindungslinien jedes Punktes einer Gruppe mit dem Durchschnitt der Tangenten in den beiden andern Punkten derselben Gruppe schneiden. Sind die Punkte der einen Gruppe veränderlich, so sind zwar auch die Steinerschen Punkte veränderlich, die Verbindungslinie der beiden Steinerschen Punkte geht jedoch stets durch einen festen Punkt, der von der festen Gruppe bestimmt wird. Sechs Punkte eines Kegelschnitts geben zehn Paaren solcher festen Punkte ihre Entstehung.*

Die Polaren der beiden Steinerschen Punkte schneiden sich stets auf einer geraden Linie, welche ebenfalls von der veränderlichen Gruppe unabhängig und die Polare des festen Punktes ist.

Dieser Satz läfst sich polarisiren und giebt dann einen analogen für das Brianchonsche Sechseck und den Kegelschnitt, bei welchem derselbe feste Punkt und dessen Polare wiederum auftreten. Wenn die bewegliche Gruppe mit der festen Gruppe zusammenfällt, so wird der feste Punkt selbst ein Steinerscher Punkt.

Schweidnitz, im Januar 1860.

Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven.

(Von Herrn *Joh. Nik. Bischoff* zu München.)

Es ist im 56sten Bande dieses Journals p. 177 bemerkt worden, dafs einer Raumcurve mn^{ter} Ordnung $2mn(3m+3n-10)$ Wendungsberührebenen, d. i. solche Ebenen zukommen, welche mit ihr vier auf einander folgende Punkte gemein haben. Man kann dies unmittelbar in folgender Weise zeigen.

Es seien $$(1.)\quad f=0 \quad \text{und} \quad \varphi=0$$
die Gleichungen der Raumcurve und f und φ vom m^{ten} und n^{ten} Grade. Für die Schmiegungsebene im Punkte (x, y, z) der Curve (1.) hat man nach Herrn *Hesse* (41ster Bd., p. 283):

$$(2.)\quad (\xi\varphi_1+\eta\varphi_2+\zeta\varphi_3+\sigma\varphi_4)\frac{P}{(m-1)^2}-(\xi f_1+\eta f_2+\zeta f_3+\sigma f_4)\frac{Q}{(n-1)^2}=0,$$

wo P und Q homogene Functionen vom $(3m+2n-8)^{ten}$ und $(3n+2m-8)^{ten}$ Grade der Coordinaten (x, y, z, s) sind.

Wählt man auf der Curve (1.) einen beliebigen Punkt (x_1, y_1, z_1), bezeichnet die ihm entsprechenden Werthe von f_1, f_2, etc., φ_1, φ_2, etc., P und Q durch f_1', f_2', etc., φ_1', φ_2', etc., P' und Q' und nimmt man den Punkt (ξ, η, ζ) so, dafs

$$\frac{\xi f_1'+\eta f_2'+\zeta f_3'+\sigma f_4'}{\xi\varphi_1'+\eta\varphi_2'+\zeta\varphi_3'+\sigma\varphi_4'}=\frac{P'}{Q'}\cdot\frac{(n-1)^2}{(m-1)^2}=\lambda,$$

dann hat von den Schmiegungsebenen, die durch den Punkt (ξ, η, ζ) gehen, allemal *eine* ihren Schmiegungspunkt in (x_1, y_1, z_1). Bestimmt man nun die letzteren Coordinaten oder λ so, dafs die Fläche

$$(3.)\quad \frac{P}{(m-1)^2}-\lambda\frac{Q}{(n-1)^2}=0$$

im Punkte (x_1, y_1, z_1) die Curve (1.) berührt, so fallen von den Schmiegungsebenen des Punktes (ξ, η, ζ) zwei zusammen, es wird also eine von diesen Ebenen Wendungsberührebene.

Die Bedingungen für das Berühren von (1.) und (3.) im Punkte (x_1, y_1, z_1) sind aber:

$$f'=0,\quad \varphi'=0,\quad \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' & f_4' \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \varphi_3' & \varphi_4' \\ P_1' & P_2' & P_3' & P_4' \\ Q_1' & Q_2' & Q_3' & Q_4' \end{vmatrix}=0.$$

Also ergiebt sich als Anzahl der Wendungsberührebenen: $2mn(3m+3n-10)$, und man sieht zugleich, dafs die Schmiegungspunkte dieser Ebenen einer Fläche von der $2(3m+3n-10)^{ten}$ Ordnung angehören.

Demnach lassen sich zwei Flächen zweiter Ordnung auf 16 Arten mit

einer Ebene so schneiden, dafs die sich ergebenden Kegelschnitte eine vierpunktige Berührung haben.

Ist die Curve (1.) Durchschnitt zweier Cylinderflächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung, so reducirt sich die vorhergehende Anzahl auf: $mn(5m+5n-18)$. Da die abwickelbare Fläche W, welche die Curve (1.) zur Rückkehrlinie hat, von der Ordnung $mn(m+n-2)$ ist, so steigt die Bedingungsgleichung (a) für das Berühren einer Ebene und der Curve (1.) hinsichtlich der Coefficienten der Ebene auf den Grad $mn(m+n-2)$. Denkt man sich nun die Coefficienten der Schmiegungsebene (2.) eingeführt in die Bedingung (a), so erhält man eine Gleichung (b) vom $3mn(m+n-2)(m+n-3)^{\text{ten}}$ Grade in x, y, z. Diese Gleichung (b) zerfällt aber offenbar 1) in die Gleichung der abwickelbaren Fläche W, 2) in die Gleichung derjenigen Fläche, deren Schnittpunkten mit der Curve (1.) Schmiegungsebenen zukommen, von welchen diese Curve noch in einem andern Punkte berührt wird und endlich 3) in die Gleichung derjenigen Fläche, welche die Curve (1.) in ihren Wendeschmiegungspunkten schneidet. Jeder Wendeschmiegungspunkt kann aber viermal als solcher Punkt genommen werden, dessen Schmiegungsebene die Curve (1.) noch in einem andern Punkte berührt. Heifst also t die Anzahl der Schmiegungsebenen, von welchen die Curve (1.) aufser im Schmiegungspunkt noch anderswo berührt wird, so hat man: $t = mn(3m+3n-10)\{mn(m+n-2)-8\}$. Die Curve (1.) hat unter ihren Tangenten auch solche, von welchen sie aufser im Berührpunkt noch anderswo geschnitten wird. Man findet die Anzahl v dieser Tangenten durch das Verfahren, welches *Jacobi* für die Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten ebener algebraischer Curven gegeben hat, und zwar folgt: $v = mn\{(m-2)(mn+n-4)+(n-2)(mn+m-4)\}$. Es liegen also die Berührpunkte dieser Tangenten zugleich in einer Fläche von der Ordnung: $(m-2)(mn+n-4)+(n-2)(mn+m-4)$.

Wählt man die Curve (1.) als Durchschnitt eines einfachen Hyperboloides und einer Fläche m^{ter} Ordnung, so giebt die vorhergehende Formel:

$$v = 4m(m-1)(m-2).$$

Bemerkt man, dafs jeder Strahl des Hyperboloides, welcher die Fläche m^{ter} Ordnung berührt, $(m-2)$ Tangenten der Schnittcurve vertritt, von welchen diese noch anderswo getroffen wird, so erhält man als Anzahl der die Fläche m^{ter} Ordnung berührenden Strahlen: $4m(m-1)$, was sich auch auf anderem Wege leicht als richtig nachweisen läfst.

München, im Februar 1860.

Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik.

(Von *G. Lejeune Dirichlet.*)

(Aus dessen Nachlass hergestellt von Herrn *R. Dedekind* zu Zürich.)

Aus dem achten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen abgedruckt.

Vorwort.

Ueber die Vollendung und Herausgabe dieser Abhandlung, welche nach dem letzten Willen des Verfassers mir übertragen worden ist, sind einige Bemerkungen vorauszuschicken. Das hier behandelte hydrodynamische Problem, dessen Lösung aus dem Winter 1856—57 stammt, wurde in kurzen Zügen zuerst am Schlusse der Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen im Juli 1857 vorgetragen, und gleichzeitig wurde das Hauptresultat der ganzen Untersuchung in den Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften durch eine kurze Anzeige veröffentlicht. Die vollständige Darstellung verzögerte sich aber, theils durch den Wunsch des Verfassers, den Gegenstand in seinen Einzelheiten noch mehr zu durchforschen, theils durch die Beschäftigung mit andern Arbeiten, bis die plötzliche Krankheit und der zu frühe Tod die Vollendung unmöglich machten. Unter den hinterlassenen Papieren, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, und die am 21. Juli 1859 in meine Hände gelangten, fand sich zunächst ein so sorgfältig ausgeführtes Manuscript, dafs es ohne die geringste Aenderung dem Druck übergeben werden konnte; nur ist es sehr zu beklagen, dafs auch in diesem Bruchstück die Einleitung, welche der Erörterung einiger allgemeiner Eigenschaften der hydrodynamischen Grundgleichungen gewidmet war, unvollendet geblieben ist. Aufser diesem Manuscript, welches in der folgenden Anordnung bis gegen den Schlufs des §. 3 reicht, fand sich eine grofse Menge einzelner Papiere mit flüchtig hingeworfenen Formeln ohne Text, deren Bedeutung aber leicht zu erkennen war. Zum gröfsten Theil waren es Wiederholungen des schon Dargestellten, und nur selten ergab sich aus ihnen ein Anhaltspunkt für die

weitere Ausführung. Indessen fiel es mit Hülfe dieser Papiere nicht schwer, die sieben Integralgleichungen erster Ordnung aufzufinden, welche in der vorläufigen Anzeige der Abhandlung erwähnt sind; sie finden sich in §. 5 der folgenden Darstellung. Aufserdem wiesen zahlreiche Stellen auf den in §. 8 behandelten Fall hin, wenn auch nirgends sich eine Discussion vorfand; ich habe ihn (in §. 6) mit dem andern in §. 7 untersuchten zu verbinden gesucht, der seiner Einfachheit halber auch in der schon erwähnten vorläufigen Anzeige mitgetheilt ist. Ferner gaben, wie aus den sämmtlich von mir hinzugefügten Anmerkungen zu sehen ist, manche Stellen des erwähnten Manuscriptes Veranlassung zur Ausführung mehr mühsamer als schwieriger Rechnungen, die, weil sie für künftige Arbeiten wohl nützlich sein können, ihren Resultaten nach in die Abhandlung aufgenommen sind und so den §. 4 bilden. Nachdem ich sie einmal abgeleitet hatte, dienten sie mir bei einigen weiteren Untersuchungen, deren Ergebnisse, so weit sie bis jetzt gelungen sind, ich in dem Schlufsparagraphen mittheilen zu dürfen glaubte. Ich verhehle mir nicht, dafs trotz aller auf die Arbeit gewendeten Sorgfalt und Liebe, Manches vollständiger und besser hätte ausgeführt werden können; allein ich wollte die Herausgabe nicht noch länger verzögern, um so weniger, da ich vertrauen darf, dafs man dieses letzte Werk des grofsen Denkers, dem es nicht vergönnt war selbst die Meisterhand an die Darstellung zu legen, auch in der unvollkommenen Form würdigen wird.

Zürich, 10. November 1859.

R. Dedekind.



Bei der Begründung der allgemeinen Gleichungen, durch welche die Bewegung flüssiger Körper bestimmt wird, kann man von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen. Nach der einen Auffassung des Gegenstandes stellt man sich die Aufgabe, für eine beliebige Stelle (x, y, z) und eine beliebige Zeit t den Zustand der bewegten Masse, d. h. die Dichtigkeit, den Druck und die drei Componenten der Geschwindigkeit auszumitteln und diese fünf Gröfsen als Functionen der vier Veränderlichen x, y, z, t zu bestimmen. Dem eben erwähnten Gesichtspunkt entsprechen die Grundgleichungen der Hydrodynamik, welche man in allen Lehrbüchern findet und welche *Euler* zuerst aufgestellt hat *). Diese *Euler*schen Gleichungen liegen auch einer grofsen Abhandlung zu Grunde, welche *Lagrange* mehr als zwanzig Jahre später in derselben akademischen Sammlung **) veröffentlicht hat und aus welcher er später mit einigen Zusätzen den Abschnitt seiner Mécanique analytique gebildet hat, welcher der Hydrodynamik gewidmet ist. Der wichtigste dieser Zusätze beginnt den erwähnten Abschnitt und betrifft eine von der *Euler*schen wesentlich verschiedene Behandlung des Gegenstandes; *Lagrange* geht nämlich darauf aus, die Bewegung jedes Elementes der Flüssigkeit zu verfolgen, d. h. die Coordinaten x, y, z, den Druck und die Dichtigkeit dieses Elementes durch seine anfänglichen Coordinaten a, b, c und die seit dem Anfang der Bewegung verflossene Zeit t zu bestimmen. Merkwürdiger Weise macht jedoch *Lagrange* von den diesem Gesichtspunkt entsprechenden Gleichungen gar keinen Gebrauch; nachdem er nämlich bemerkt hat, dafs sie etwas complicirt seien, formt er seine Gleichungen in die *Euler*schen um, und fügt dann

*) Principes généraux du mouvement des fluides (Histoire de l'Acad. de Berlin; Année 1755).

**) Mémoire sur la Théorie du mouvement des fluides (Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin; Année 1781).

hinzu, dafs die letzteren wegen ihrer gröfseren Einfachheit zur Lösung besonderer Aufgaben vorzugsweise geeignet seien. Ich mufs jedoch gestehen, dafs mir der Vorzug, welchen *Lagrange* den *Euler*schen Gleichungen vor den seinigen einräumt, durchaus nicht begründet scheint, indem jene eine Eigenthümlichkeit darbieten, von welcher die letzteren frei sind und durch welche die einfachere Form mehr als aufgewogen wird.

Die Eigenthümlichkeit, von welcher ich rede und die *Lagrange* völlig übersehen zu haben scheint, besteht darin, dafs die Coordinaten x, y, z nicht unabhängige Variable im eigentlichen Sinne des Wortes sind, da die Ausdehnung, in welcher sie gelten, die des Raumes ist, welchen die bewegte Masse jeden Augenblick einnimmt, und folglich durch die ganze vorangegangene Bewegung bestimmt wird. Es ist aus diesem Umstande leicht ersichtlich, in welche Schwierigkeiten die Anwendung der *Euler*schen Gleichungen auf besondere Probleme verwickeln mufs, da wir jetzt wissen, was freilich zur Zeit des Erscheinens der Mécanique analytique noch nicht erkannt war, ein wie wesentliches Element für die Bestimmung von Functionen mehrerer Veränderlichen, welche durch partielle Differentialgleichungen und andere der besonderen Frage angehörige Bedingungen definirt werden, der Umfang bildet, welcher diesen Veränderlichen zukommt. Der Vorzug der *Euler*schen Form scheint auf den Fall beschränkt, wo die flüssige Masse im Laufe der Bewegung dieselbe äufsere Gestalt behält, auf welchen Fall übrigens auch der leicht zurückgeführt wird, wo sich ein fester Körper in einer unendlichen Flüssigkeit bewegt.

Dafs die erwähnte Eigenthümlichkeit der von *Euler* gegebenen Gleichungen *Lagrange* entgangen ist, hat einige Unrichtigkeiten zur Folge gehabt, von welchen ich die wesentlichste hier erwähnen zu müssen glaube, da sie in alle Lehrbücher übergegangen ist und wissenschaftliche Irrthümer um so schwerer verschwinden, je gröfser die Autorität ist, unter deren Schutz sie stehen. Schon *Euler* hatte in der oben citirten Abhandlung bemerkt, dafs seine Grundgleichungen sich sehr vereinfachen und auf eine zurückkommen, wenn für die ganze Dauer der Bewegung sowohl die drei Componenten der Geschwindigkeit als die der beschleunigenden Kraft die nach den drei Coordinaten genommenen partiellen Differentialquotienten derselben Function dieser Coordinaten sind, und diese Bemerkung ist von *Lagrange* durch den wichtigen Zusatz vervollständigt worden, dafs die eben ausgesprochene Voraussetzung immer für die Componenten der Geschwindigkeit von selbst Statt

findet, wenn sie nur für den Anfang der Bewegung gilt und überdies die Componenten der Kraft zu jeder Zeit dieselbe Bedingung erfüllen *).

§. 1.

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik in der Form, welche *Lagrange* denselben gegeben hat, sind die folgenden, wenn wir uns auf den Fall der Homogeneität beschränken und die Dichtigkeit der Einheit gleich setzen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{dx}{da}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{dy}{da}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{dz}{da}+\frac{dp}{da}=0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{dx}{db}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{dy}{db}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{dz}{db}+\frac{dp}{db}=0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{dx}{dc}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{dy}{dc}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{dz}{dc}+\frac{dp}{dc}=0, \end{cases}$$

$$\Sigma\pm\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}\frac{dz}{dc}=1.$$

In diesen Gleichungen sind a, b, c die anfänglichen Coordinaten eines beliebigen Elementes, so dafs also der unveränderliche Umfang dieses Systemes

---

*) Hier bricht leider das Manuscript vollständig ab, und es war nirgends eine Andeutung über die weitere Ausführung zu finden; doch ist wohl kaum zu zweifeln, dafs die beabsichtigte Berichtigung in Folgendem bestehen sollte. Wenn man diejenige Function, deren partielle Derivirte die Componenten der wirkenden Kraft liefern, durch partielle Differentiationen aus den drei ersten der von *Lagrange* gegebenen Grundgleichungen eliminirt, so erhält man drei Resultate, welche eine unmittelbare Integration in Bezug auf die Zeit gestatten; bezeichnet man mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei Integrationsconstanten, welche also nur noch von a, b, c abhangen können, so ergeben sich mit Hülfe der vierten *Lagrange*schen Gleichung, welche die Incompressibilität der Flüssigkeit ausdrückt, leicht die drei folgenden Gleichungen

$$\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=\mathfrak{A}\frac{dx}{da}+\mathfrak{B}\frac{dx}{db}+\mathfrak{C}\frac{dx}{dc},\quad \frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz}=\mathfrak{A}\frac{dy}{da}+\mathfrak{B}\frac{dy}{db}+\mathfrak{C}\frac{dy}{dc},$$

$$\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=\mathfrak{A}\frac{dz}{da}+\mathfrak{B}\frac{dz}{db}+\mathfrak{C}\frac{dz}{dc},$$

in welchen u, v, w die nach den Axen der x, y, z genommenen Componenten der Geschwindigkeit bedeuten. Aus diesen Gleichungen folgt, dafs, wenn für ein bestimmtes Element (a,b,c) der flüssigen Masse die Werthe der drei zur Linken stehenden Differenzen anfänglich verschwinden, dasselbe während der ganzen Dauer der Bewegung für das nämliche Massenelement (a,b,c) gelten wird. Ist daher ursprünglich in einem von flüssiger Masse erfüllten Raume — denn nur in einem solchen kommt den Zeichen u, v, w eine wirkliche Bedeutung zu — der Ausdruck $udx+vdy+wdz$ ein vollständiges Differential, so wird dasselbe auch zu jeder spätern Zeit für denjenigen Raum gelten, welcher augenblicklich die nämlichen Elemente der flüssigen Masse enthält. Es haftet daher diese Eigenthümlichkeit der Bewegung nicht sowohl, wie *Lagrange* zu beweisen glaubte, an dem absoluten Raume, als vielmehr an der Masse. — Die weitere Untersuchung der Bedeutung der drei Integralgleichungen gehört nicht hierher.

von drei Variabeln durch die ursprüngliche Gestalt der Flüssigkeit bestimmt wird, x, y, z bezeichnen für die Zeit t die Coordinaten desselben Elementes, p den Druck, welchen dasselbe erleidet, und X, Y, Z endlich sind die Componenten der auf das Element wirkenden beschleunigenden Kraft. Was die letzte Gleichung betrifft, welche die Incompressibilität der Flüssigkeit ausdrückt, so hat das Summenzeichen in derselben nach der üblichen Bezeichnung die Bedeutung einer Determinante. Wir werden einen Fall behandeln, in welchem die beschleunigende Kraft von der Anziehung der gesammten Masse herrührt und die Elementaranziehung dem Quadrat der Entfernung umgekehrt proportional ist. Bezeichnet daher V zur Zeit t das Potential der Flüssigkeit für den innern Punkt (x, y, z), so dafs also V eine Function von x, y, z und t ist, und bezeichnet ferner ε die Constante, welche die Anziehung zwischen zwei Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung ausdrückt, so ist

$$X = \varepsilon \frac{dV}{dx}, \quad Y = \varepsilon \frac{dV}{dy}, \quad Z = \varepsilon \frac{dV}{dz}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke nehmen die drei ersten Gleichungen folgende Gestalt an

$$(2.) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{da} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{da} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{da} - \varepsilon\frac{dV}{da} + \frac{dp}{da} = 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{db} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{db} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{db} - \varepsilon\frac{dV}{db} + \frac{dp}{db} = 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dc} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dc} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dc} - \varepsilon\frac{dV}{dc} + \frac{dp}{dc} = 0. \end{cases}$$

Unsere Untersuchung ist auf die Voraussetzung beschränkt, dafs die zu bestimmenden Functionen x, y, z der vier unabhängigen Variabeln a, b, c, t die drei ersten derselben nur linear enthalten, und wir bemerken sogleich, dafs wir überall in der Folge unter einem linearen Ausdruck einen solchen verstehen werden, der kein von den Variabeln unabhängiges Glied enthält. Wir haben also:

$$(3.) \quad \begin{cases} x = la + mb + nc, \\ y = l'a + m'b + n'c, \\ z = l''a + m''b + n''c, \end{cases}$$

wo die Coefficienten l, m, etc. nur von der Zeit t abhängig sind und in Folge der Incompressibilität folgende Gleichung befriedigen müssen

$$\theta = \Sigma \pm lm'n'' = 1.$$

Für $t=0$ fallen x, y, z mit a, b, c zusammen, so dafs also $l=m'=n''=1$,



während die sechs übrigen dieser Gröfsen verschwinden. Differentiirt man obige Gleichungen nach t, so erhält man für die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit

$$(3^a.)\quad \begin{cases} u = \frac{dx}{dt} = \frac{dl}{dt}a + \frac{dm}{dt}b + \frac{dn}{dt}c, \\ v = \frac{dy}{dt} = \frac{dl'}{dt}a + \frac{dm'}{dt}b + \frac{dn'}{dt}c, \\ w = \frac{dz}{dt} = \frac{dl''}{dt}a + \frac{dm''}{dt}b + \frac{dn''}{dt}c. \end{cases}$$

Die anfänglichen Werthe der Gröfsen

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{dl}{dt}, & \frac{dm}{dt}, & \frac{dn}{dt}, \\ \frac{dl'}{dt}, & \frac{dm'}{dt}, & \frac{dn'}{dt}, \\ \frac{dl''}{dt}, & \frac{dm''}{dt}, & \frac{dn''}{dt} \end{cases}$$

sind nicht ganz willkührlich, sondern es findet zwischen denselben die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 = 0$$

Statt, welche man erhält, wenn man $\frac{d\theta}{dt}$ bildet und dann $t = 0$ setzt.

Wir wollen nun zeigen, dafs unsere Ausdrücke, in denen 9 unbekannte Functionen der Zeit t vorkommen, die Bewegung einer flüssigen Masse ausdrücken, deren Elemente sich nach dem Gesetze der Natur anziehen, wenn die Masse ursprünglich die Gestalt eines Ellipsoides hat, die anfängliche Bewegung den Gleichungen (3ᵃ.), welche 8 willkührliche Constanten enthalten, gemäfs ist und endlich an der Oberfläche ein constanter oder nur von der Zeit abhängiger Druck Statt findet. Läfst man den Anfangspunkt der Coordinaten mit dem Mittelpunkt, die Axen der x, y, z oder a, b, c mit den Hauptaxen des Ellipsoides zusammenfallen, so hat die Gleichung der anfänglichen Oberfläche die Form

$$(5.)\quad \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1.$$

Ehe wir weiter gehen, ist zu bemerken, dafs unsere Ausdrücke (3.) und (4.) die bei der Begründung der Gleichungen (1.) vorausgesetzte Continuitätsbedingung erfüllen, welche wesentlich darin besteht, dafs die Punkte, welche anfänglich eine geschlossene Fläche bilden, auch zu jeder späteren Zeit eine

solche bilden, und dafs jeder ursprünglich innerhalb oder aufserhalb dieser Fläche liegende Punkt eine ähnliche Lage in Bezug auf die neue Fläche einnimmt. Es ist dies eine Folge daraus, dafs zu jedem System bestimmter und endlicher Werthe a, b, c ein eben solches System von Werthen x, y, z und wegen $\theta = 1$ auch umgekehrt gehört.

Löst man die Gleichungen (3.) nach a, b, c auf, so erhält man

$$(6.)\quad \begin{cases} a = \lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \\ b = \mu x + \mu' y + \mu'' z, \\ c = \nu x + \nu' y + \nu'' z, \end{cases}$$

wo λ, λ', etc. wegen $\theta = 1$ Ausdrücke ohne Nenner und die sogenannten aus den 9 Gröfsen l, m, etc. gebildeten partiellen Determinanten sind, so dafs also z. B. $\lambda = m'n'' - m''n'$. Setzt man die Werthe a, b, c in obige Gleichung ein, so erhält man zur Bestimmung der Oberfläche zur Zeit t

$$(7.)\quad \frac{1}{A^2}(\lambda x + \lambda' y + \lambda'' z)^2 + \frac{1}{B^2}(\mu x + \mu' y + \mu'' z)^2 + \frac{1}{C^2}(\nu x + \nu' y + \nu'' z)^2 = 1,$$

so dafs also bei einer durch die Gleichungen (3.) bestimmten Bewegung die anfänglich ellipsoidisch vorausgesetzte Oberfläche auch zu jeder späteren Zeit die Gestalt eines mit dem ursprünglichen concentrischen Ellipsoides hat. Man kann noch hinzufügen, dafs Punkte, welche anfänglich ein mit der Oberfläche concentrisches, ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid bilden, zu jeder andern Zeit in ähnlicher Beziehung zu der jedesmaligen Oberfläche stehen werden. Es soll nun gezeigt werden, dafs die Ausdrücke (3.) den Gleichungen (2.) genügen, wenn die darin enthaltenen Functionen der Zeit, l, m, etc. gehörig gewählt werden. Hierzu ist zunächst erforderlich, dafs das Potential V der von dem Ellipsoid (7.) begrenzten Masse für einen inneren Punkt (x, y, z) bestimmt und dann durch a, b, c ausgedrückt werde. Nach einem bekannten Satze ist das Potential eines auf seine Hauptaxen bezogenen Ellipsoides für einen inneren Punkt ein viergliedriger Ausdruck, der aufser einem constanten Theile drei den Quadraten der Coordinaten proportionale Glieder enthält. Um das Potential für unser Ellipsoid (7.), welches nicht auf seine Hauptaxen bezogen ist, zu erhalten, müfste man also durch Auflösung einer cubischen Gleichung zu diesen übergehen und dann das für das neue Coordinatensystem geltende Potential durch x, y, z ausdrücken. Bei der eben angedeuteten etwas umständlichen Rechnung stellt sich heraus, dafs das Resultat nur symmetrische Verbindungen der Wurzeln der cubischen Gleichung enthält und also ohne

Lösung dieser Gleichung aufgestellt werden kann. Man gelangt zu demselben Ergebnifs auf weit kürzerem Wege, wenn man sich zur Auffindung des Potentials der Methode des discontinuirlichen Faktors bedient, welche unmittelbar auf ein Ellipsoid angewandt werden kann, welches auf beliebige Axen bezogen ist *). Da jedoch der sehr complicirte Ausdruck, welchen man durch die eine oder die andere der angegebenen Verfahrungsarten erhält, zu unserem Zwecke entbehrlich ist, so wollen wir uns bei der Ableitung desselben nicht aufhalten **). Es genügt für uns zu bemerken, dafs das durch x, y, z ausgedrückte Potential offenbar aufser einem constanten den Werth desselben im Mittelpunkt darstellenden Bestandtheil eine vollständige homogene Function des zweiten Grades von x, y, z enthält. Dieselbe Form wird das Potential in Bezug auf a, b, c darbieten, wenn man für x, y, z die Ausdrücke (3.) einsetzt. Es ist also

$$V = H - La^2 - Mb^2 - Nc^2 - 2L'bc - 2M'ca - 2N'ab,$$

wo $L, M, \dots N'$ sehr zusammengesetzte, elliptische Integrale enthaltende Functionen von $l, m, \dots n''$ bezeichnen. Da hiernach $\frac{dV}{da}, \frac{dV}{db}, \frac{dV}{dc}$ die Variabeln a, b, c nur linear enthalten, und dasselbe von den drei ersten Gliedern in jeder der Gleichungen (2.) gilt, so werden diese Gleichungen unabhängig von a, b, c nur bestehen können, wenn der Druck aufser einem von a, b, c unabhängigen Bestandtheil nur Glieder zweiter Ordnung enthält. Da wir nun andererseits voraussetzen, dafs dieser Druck an der ganzen Oberfläche zu derselben Zeit denselben blos von dieser abhängigen Werth P hat, so mufs p

---

*) Ueber eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin; 1839). — Unter den hinterlassenen Papieren fand sich die folgende vereinzelte Bemerkung: „Als einmal zwischen *Jacobi* und mir die Rede von der Attraction der Ellipsoide war, mit welchem Problem der grofse Mathematiker sich früher sehr angelegentlich beschäftigt hatte, erwähnte er eines Umstandes, der ihn sehr überrascht hatte, des Umstandes nämlich, dafs die Bestimmung der auf einen äufseren Punkt ausgeübten Anziehung auch dann nur die Lösung einer einzigen cubischen Gleichung erfordere, wenn das Ellipsoid nicht auf seine Hauptaxen bezogen sei, und legte mir die Frage vor, wie sich die Methode des discontinuirlichen Factors in dieser Beziehung verhalte. Ich konnte sogleich antworten, dafs sich bei Anwendung der eben erwähnten Methode dieselbe Erscheinung zeige, und *Jacobis* Bemerkung zugleich durch die Angabe vervollständigen, dafs sich für einen inneren Punkt gar keine cubische Gleichung einstelle.“ — Vergl. Anmerkung (1) zu §. 4.

**) Es erschien zweckmäfsig, die hier und im Folgenden angedeutete, durchaus nicht schwierige Rechnung wirklich auszuführen; die Resultate findet man weiter unten im §. 4.

offenbar die Form

$$p = P + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right)$$

haben, wo σ eine nur mit t veränderliche Gröſse bezeichnet. Setzt man alle im Vorhergehenden erhaltenen Ausdrücke in die Gleichungen (2.) ein, so zerfällt jede derselben in drei neue Gleichungen, indem die mit a, b, c multiplicirten Glieder besonders verschwinden müssen. Man hat also zur Bestimmung der 10 Functionen der Zeit, $l, m, \ldots n''$, σ die folgenden Gleichungen, welche in gleicher Anzahl sind,

$$(a)\quad \begin{cases} l\dfrac{d^2 l}{dt^2} + l'\dfrac{d^2 l'}{dt^2} + l''\dfrac{d^2 l''}{dt^2} = -2L\varepsilon + \dfrac{2\sigma}{A^2} \\ m\dfrac{d^2 m}{dt^2} + m'\dfrac{d^2 m'}{dt^2} + m''\dfrac{d^2 m''}{dt^2} = -2M\varepsilon + \dfrac{2\sigma}{B^2} \\ n\dfrac{d^2 n}{dt^2} + n'\dfrac{d^2 n'}{dt^2} + n''\dfrac{d^2 n''}{dt^2} = -2N\varepsilon + \dfrac{2\sigma}{C^2} \\ m\dfrac{d^2 n}{dt^2} + m'\dfrac{d^2 n'}{dt^2} + m''\dfrac{d^2 n''}{dt^2} = -2L'\varepsilon \\ n\dfrac{d^2 m}{dt^2} + n'\dfrac{d^2 m'}{dt^2} + n''\dfrac{d^2 m''}{dt^2} = -2L'\varepsilon \\ n\dfrac{d^2 l}{dt^2} + n'\dfrac{d^2 l'}{dt^2} + n''\dfrac{d^2 l''}{dt^2} = -2M'\varepsilon \\ l\dfrac{d^2 n}{dt^2} + l'\dfrac{d^2 n'}{dt^2} + l''\dfrac{d^2 n''}{dt^2} = -2M'\varepsilon \\ l\dfrac{d^2 m}{dt^2} + l'\dfrac{d^2 m'}{dt^2} + l''\dfrac{d^2 m''}{dt^2} = -2N'\varepsilon \\ m\dfrac{d^2 l}{dt^2} + m'\dfrac{d^2 l'}{dt^2} + m''\dfrac{d^2 l''}{dt^2} = -2N'\varepsilon \\ \Sigma \pm lm'n'' = 1. \end{cases}$$

Es ist leicht, die Unbekannte σ zu eliminiren, indem man aus den drei ersten dieser Gleichungen eine Doppelgleichung bildet; der gröſseren Symmetrie halber wollen wir jedoch die Gleichungen in unveränderter Form beibehalten.

§. 2.

Obgleich das eben aufgestellte System allen Bedingungen der Aufgabe genügt und ebensoviel Gleichungen als Unbekannte enthält, so reicht, streng genommen, dieser doppelte Umstand nicht aus, um die Möglichkeit der oben angedeuteten Bewegung zu zeigen. Es ist vielmehr noch nachzuweisen,

dafs unsere Gleichungen ausreichen, um aus den anfänglichen Werthen der Gröfsen $l, m, \ldots n''$ und ihrer Derivirten $\frac{dl}{dt}, \ldots \frac{dn''}{dt}$, für welche anfänglichen Werthe die obigen Bedingungen gelten, die Werthe der Gröfsen $l, m, \ldots n''$ für eine beliebige Zeit t ableiten zu können. Es kommt dieser Nachweis offenbar darauf hinaus, zu zeigen, dafs, wenn für eine beliebige Zeit die Werthe von $l, m, \ldots n''$ und ihren ersten Derivirten als endlich und völlig bekannt vorausgesetzt werden, aus unseren Gleichungen die Werthe der zweiten Derivirten $\frac{d^2 l}{dt^2}, \frac{d^2 m}{dt^2}, \ldots \frac{d^2 n''}{dt^2}$ für dieselbe Zeit abgeleitet werden können. Es wird genügen, die hier erforderliche Rechnung, welche durchaus keine Schwierigkeiten darbietet, mit wenigen Worten anzudeuten. Löst man die drei der Gleichungen (a), welche $\frac{d^2 l}{dt^2}, \frac{d^2 l'}{dt^2}, \frac{d^2 l''}{dt^2}$ enthalten, nach diesen Gröfsen auf und verfährt ebenso in Bezug auf die sechs übrigen, so erhält man für jede der 9 zweiten Derivirten einen Ausdruck der Form $e\sigma + f$, wo e und f wegen $\theta = 1$ ohne Nenner sind und völlig bestimmte endliche Werthe haben, so dafs alles darauf hinauskommt sich zu überzeugen, dass σ einen bestimmten endlichen Werth hat. Dieser Werth aber ergiebt sich aus einer Gleichung der Form $e'\sigma + f' = 0$, welche man erhält, wenn man die eben erwähnten Ausdrücke in die Gleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ setzt, und in welcher von e' und f' dasselbe gilt, was vorhin in Bezug auf e und f bemerkt wurde, und e' als eine Summe von Quadraten, die nicht gleichzeitig verschwinden können, von Null verschieden sein wird *).

Es ist übrigens hinsichtlich der Bewegung, welche durch unsere Gleichungen definirt wird, eine wesentliche Bemerkung zu machen, welche den jeden Augenblick an der Oberfläche ausgeübten Druck betrifft. Dieser Druck mufs in gewissen Fällen eine bestimmte Grenze übersteigen, wenn die Bewegung physisch möglich sein soll, es sei denn, dafs man unter einer incompressibeln Flüssigkeit eine solche verstehen wollte, die, wie sie jeder Zusammendrückung, so auch jeder sie zur Trennung sollicitirenden Kraft widersteht. Nimmt man diese letztere Fähigkeit, wie gewöhnlich, nicht in die Definition auf, so ist es für die Darstellbarkeit der Bewegung durch die hydrodynamischen Gleichungen erforderlich, dafs der Druck in der bewegten

*) Das ausgeführte Resultat dieser Rechnung findet man in §. 4.

Masse nie negativ werde. Da nun in unserem Falle

$$p = P + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A^2} - \frac{b^2}{B^2} - \frac{c^2}{C^2}\right)$$

und der eingeklammerte Ausdruck innerhalb der Masse alle Werthe zwischen 0 und 1 annimmt, so besteht für den Fall, wo die Gröfse σ, die im Allgemeinen nur durch die Integration unserer Differentialgleichungen bestimmt werden kann, zu irgend einer Zeit einen negativen Werth erhält, die Bedingung, dafs P nicht unter dem absoluten Werthe von σ liege. Nur wenn σ nie negativ wird, bleibt P unbeschränkt und kann die durch unsere Gleichungen definirte Bewegung im leeren Raume und ohne äusseren Druck Statt finden.

Nur der anfängliche d. h. $t = 0$ entsprechende Werth von σ läfst sich ohne Integration bestimmen. Setzt man $t = 0$ in der Gleichung $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, so erhält man

$$\frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{d^2 m'}{dt^2} + \frac{d^2 n''}{dt^2} = \begin{Bmatrix} -2\frac{dm'}{dt}\frac{dn''}{dt} - 2\frac{dn''}{dt}\frac{dl}{dt} - 2\frac{dl}{dt}\frac{dm'}{dt} \\ +2\frac{dm''}{dt}\frac{dn'}{dt} + 2\frac{dn}{dt}\frac{dl''}{dt} + 2\frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt} \end{Bmatrix}.$$

Den drei ersten Gliedern der zweiten Seite kann man die Form geben

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dl}{dt} + \frac{dm'}{dt} + \frac{dn''}{dt}\right)^2,$$

wo das letzte Quadrat nach der schon früher bemerkten Bedingungsgleichung verschwindet. Andrerseits ergiebt sich, immer unter der Voraussetzung $t = 0$, durch Addition der drei ersten der Gleichungen (a)

$$\frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{d^2 m'}{dt^2} + \frac{d^2 n''}{dt^2} = -2(L + M + N)\varepsilon + 2\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}\right)\sigma,$$

und da zu Anfang x, y, z mit a, b, c zusammenfallen, so hat V die Form

$$V = H - Lx^2 - My^2 - Nz^2,$$

so dafs also nach einem bekannten Satze

$$4\pi = -\frac{d^2 V}{dx^2} - \frac{d^2 V}{dy^2} - \frac{d^2 V}{dz^2} = 2(L + M + N).$$

Hiernach wird unsere obige Gleichung

$$\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}\right)\sigma = 2\pi\varepsilon + \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right) + \frac{dm''}{dt}\frac{dn'}{dt} + \frac{dn}{dt}\frac{dl''}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm}{dt}.$$

Sind nun z. B. diejenigen der anfänglichen Werthe (4.), welche sich ausser-

halb der Diagonale befinden, und zu dieser eine symmetrische Lage einnehmen, einander gleich, so ist der anfängliche Werth von σ positiv, und wir werden weiter unten sehen, dafs in diesem besonderen Falle dasselbe für die ganze Dauer der Bewegung Statt findet *).

§. 3.

Um von der im §. 1. betrachteten Bewegung eine einfache Anschauung zu gewinnen, ist es zweckmäfsig die durch lineare Ausdrücke ausgedrückte momentane Bewegung in zwei einfachere zu zerlegen. Wir bemerken jedoch, dafs diese Zerlegung nur den eben angegebenen Zweck hat und für die vollständige Behandlung des Problems keinen wesentlichen Nutzen gewährt, da die beiden Theilbewegungen sich im Allgemeinen nicht für die ganze Dauer der Bewegung getrennt bestimmen lassen, und bemerken ferner, dafs einige der in diesem §. gebrauchten Zeichen eine von der denselben in der übrigen Abhandlung beigelegten abweichende Bedeutung haben. Substituirt man in den obigen Ausdrücken von u, v, w für a, b, c die Werthe (6.), so erhalten die Componenten die Form

$$(1.)\quad \begin{cases} u = gx + hy + kz \\ v = g'x + h'y + k'z \\ w = g''x + h''y + k''z, \end{cases}$$

wo g, h etc. einfache Verbindungen von den selbst durch l, m etc. ausgedrückten Gröfsen λ, μ etc. und den Gröfsen (4) sind, und man überzeugt sich leicht, dafs in Folge der oben bemerkten Bedingungsgleichung immer die Relation

$$g + h' + k'' = 0$$

Statt findet **).

Nun läfst sich die augenblickliche Bewegung eines Systemes, bei welcher wie hier die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit eines beliebigen den Coordinaten x, y, z entsprechenden Punktes lineare Functionen dieser Coordinaten sind, immer, auch abgesehen von der in unserm Fall Statt findenden Relation zwischen den drei Coefficienten g, h', k'', in zwei einfachere Bewegungen zerlegen. Die eine dieser Theilbewegungen ist von solcher Beschaffenheit, dafs, wenn das System auf drei gehörig gewählte neue Axen

*) Den Beweis dieser Behauptung findet man in §. 5.

**) Die Werthe der Coefficienten g, h, .. k'' sind in §. 4. angegeben.

der ξ, η, ζ bezogen wird, die diesen parallelen Componenten p, q, r der Geschwindigkeit die einfache Gestalt

$$(2.)\qquad p = a\xi,\quad q = b\eta,\quad r = c\zeta$$

annehmen, wogegen die andere Theilbewegung in einer blossen Rotation besteht, bei welcher das System sich wie ein fester Körper um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe dreht. Um sich von der Möglichkeit einer solchen Zerlegung zu überzeugen, ist zunächst zu untersuchen, wie sich die Componenten u_1, v_1, w_1 der durch die Gleichungen (2.) ausgedrückten Bewegung darstellen, wenn man diese Bewegung auf drei ganz beliebige Axen der x, y, z bezieht. Setzt man zu diesem Zwecke unter Anwendung der üblichen Bezeichnung für die von den Axen gebildeten Winkel

$$\begin{array}{lll} \cos x\xi = \alpha, & \cos x\eta = \beta, & \cos x\zeta = \gamma \\ \cos y\xi = \alpha', & \cos y\eta = \beta', & \cos y\zeta = \gamma' \\ \cos z\xi = \alpha'', & \cos z\eta = \beta'', & \cos z\zeta = \gamma'', \end{array}$$

so hat man nach den bekannten Sätzen

$$\begin{array}{ll} u_1 = \alpha\, p + \beta\, q + \gamma\, r & \xi = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ v_1 = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r & \eta = \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ w_1 = \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r & \zeta = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z. \end{array}$$

Werden die obigen Werthe von p, q, r in den drei ersten Gleichungen und dann für ξ, η, ζ ihre durch die drei letzten gegebenen Werthe substituirt, so erhält man

$$(3.)\qquad \begin{cases} u_1 = l x + n' y + m' z \\ v_1 = n' x + m y + l' z \\ w_1 = m' x + l' y + n z, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{array}{ll} l = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 & l' = a\alpha'\alpha'' + b\beta'\beta'' + c\gamma'\gamma'' \\ m = a\alpha'^2 + b\beta'^2 + c\gamma'^2 & m' = a\alpha''\alpha + b\beta''\beta + c\gamma''\gamma \\ n = a\alpha''^2 + b\beta''^2 + c\gamma''^2 & n' = a\alpha\alpha' + b\beta\beta' + c\gamma\gamma'. \end{array}$$

Man sieht also, dafs, wenn die durch (2.) bestimmte Bewegung auf ein beliebiges Axensystem bezogen wird, in den Ausdrücken für die Componenten nur 6 verschiedene Coefficienten vorkommen und je zwei derselben, welche in Bezug auf die Diagonale symmetrische Stellen einnehmen, gleich sind. Es ist nun auch umgekehrt leicht, sich zu überzeugen, dafs jede durch lineare Ausdrücke von der eben erwähnten Beschaffenheit definirte Bewegung so auf

drei neue Axen der ξ, η, ζ bezogen werden kann, dafs die Componenten die obige einfache Form (2.) annehmen. Diese Behauptung rechtfertigt sich sogleich durch den bekannten Satz, nach welchem der Ausdruck

$$lx^2+my^2+nz^2+2l'yz+2m'zx+2n'xy$$

durch Einführung anderer Axen auf die Form

$$a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2$$

gebracht werden kann, da offenbar die zur Erfüllung dieser Forderung zu lösenden Gleichungen mit denjenigen zusammenfallen, auf welche unsere Frage zurückkommt. Wir können daher dies bekannte Resultat auf unsere Untersuchung anwenden. Nach diesem Resultate sind a, b, c völlig bestimmt und die drei immer reellen Wurzeln *einer* cubischen Gleichung; von diesen Wurzeln ist eine nach Belieben für a, eine zweite für b und die dritte endlich für c zu nehmen, da eine Vertauschung derselben keinen anderen Erfolg hat als eine entsprechende Aenderung in der Benennung der Axen nach sich zu ziehen. Sind die Werthe a, b, c ungleich, so ist auch das System der Axen der ξ, η, ζ seiner Lage nach völlig bestimmt. Etwas anders verhält es sich, wenn zwei der Wurzeln oder alle drei einander gleich sind. Im ersteren Falle, wenn z. B. a und b gleich aber von c verschieden sind, ist nur die Axe der ζ ihrer Lage nach bestimmt, wogegen für die beiden anderen irgend zwei auf einander und auf jener senkrechte Gerade genommen werden können. In diesem Falle wird die schon so leicht zu übersehende durch die Gleichungen (2.) definirte Bewegung noch anschaulicher, wenn man die beiden ersten Componenten zu einer Geschwindigkeit vereinigt, die der Richtung nach mit dem auf die dritte Axe herabgelassenen Perpendikel h zusammenfällt und den Werth ah hat. Sind endlich die drei Wurzeln a, b, c alle einander gleich, so bleibt das System der drei rechtwinkligen Axen seiner Lage nach ganz willkührlich, die Geschwindigkeit fällt überall ihrer Richtung nach mit der Entfernung ϱ vom Nullpunkte zusammen und hat den Werth $a\varrho$.

Was nun zweitens eine Bewegung betrifft, in welcher das System ohne Aenderung in der relativen Lage seiner Theile um eine durch den Anfangspunkt gehende Axe rotirt, so sind für eine solche Bewegung die Componenten u_2, v_2, w_2 der Geschwindigkeit von der Form

$$(4.)\qquad u_2=q'z-r'y,\quad v_2=r'x-p'z,\quad w_2=p'y-q'x,$$

und umgekehrt ist jede durch diese Ausdrücke bestimmte Bewegung eine Rotation der bezeichneten Art.

Hiernach wird also die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung über die Zerlegbarkeit einer durch die Gleichungen (1.) dargestellten Bewegung dargethan sein, wenn die neun in den Gleichungen (3.) und (4.) enthaltenen Coefficienten so gewählt werden können, dafs

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad w = w_1 + w_2$$

wird; dafs dies aber stets und zwar nur auf eine einzige Weise möglich ist, erhellt unmittelbar aus der Form dieser Forderungen, und es bleibt nur noch zu bemerken, dafs in Folge der Relation

$$g + h' + k'' = 0$$

der Charakter der ersten der beiden Theilbewegungen in unserem Falle die Beschränkung erleidet, welche durch die Gleichung

$$a + b + c = 0$$

ausgedrückt wird und ihren Grund in der Incompressibilität der Flüssigkeit findet.

§. 4.

Bevor wir weitergehen, wird es zweckmäfsig sein, die Resultate einiger oben nur angedeuteten Rechnungen hier anzugeben. Dazu gehört vor Allem der Ausdruck des Potentials V eines nicht auf seine Hauptaxen bezogenen durch die Ungleichheit

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + 2Tyz + 2T'zx + 2T''xy < 1$$

begrenzten Ellipsoids für irgend einen inneren Punkt (x, y, z). Bezeichnet man die auf der linken Seite dieser Ungleichheit befindliche ternäre quadratische Form mit F, die ihr adjungirte

$$(S'S''-T^2)x^2 + (S''S-T'^2)y^2 + (SS'-T''^2)z^2 + 2(T'T''-TS)yz + 2(T''T-T'S')zx + 2(TT'-T''S'')xy$$

mit F', ferner die positive Quadratwurzel aus der Determinante

$$Gs^3 + G_1 s^2 + G_2 s + 1$$

der neun Gröfsen

$$\begin{matrix} Ss+1, & T''s, & T's \\ T''s, & S's+1, & Ts \\ T's, & Ts, & S''s+1 \end{matrix}$$

mit Δ, so findet man nach jeder der beiden im §. 1. angegebenen Methoden*)

*) Die in der Anmerkung zu §. 1. pag. 189 erwähnte cubische Gleichung in Bezug auf s erhält man, wenn man den eingeklammerten Ausdruck unter dem Integralzeichen auf der folgenden Seite $= 0$ setzt.



$$V=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\left\{1-\frac{F-F's+(x^2+y^2+z^2)(G_1s+Gs^2)}{\Delta^2}\right\}.$$

In unserm Falle hängen die Coefficienten der beiden Formen F und F' auf folgende Weise von den Functionen $l, m, \ldots n''$ und den entsprechenden $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ ab:

$$S=\frac{\lambda^2}{A^2}+\frac{\mu^2}{B^2}+\frac{\nu^2}{C^2};\quad T=\frac{\lambda'\lambda''}{A^2}+\frac{\mu'\mu''}{B^2}+\frac{\nu'\nu''}{C^2}$$

$$S'=\frac{\lambda'^2}{A^2}+\frac{\mu'^2}{B^2}+\frac{\nu'^2}{C^2};\quad T'=\frac{\lambda''\lambda}{A^2}+\frac{\mu''\mu}{B^2}+\frac{\nu''\nu}{C^2}$$

$$S''=\frac{\lambda''^2}{A^2}+\frac{\mu''^2}{B^2}+\frac{\nu''^2}{C^2};\quad T''=\frac{\lambda\lambda'}{A^2}+\frac{\mu\mu'}{B^2}+\frac{\nu\nu'}{C^2}$$

und

$$S'S''-T^2=\frac{A^2l^2+B^2m^2+C^2n^2}{A^2B^2C^2};\qquad T'T''-TS=\frac{A^2l'l''+B^2m'm''+C^2n'n''}{A^2B^2C^2}$$

$$S''S-T'^2=\frac{A^2l'^2+B^2m'^2+C^2n'^2}{A^2B^2C^2};\qquad T''T-T'S'=\frac{A^2l''l+B^2m''m+C^2n''n}{A^2B^2C^2}$$

$$SS'-T''^2=\frac{A^2l''^2+B^2m''^2+C^2n''^2}{A^2B^2C^2};\qquad TT'-T''S''=\frac{A^2ll'+B^2mm'+C^2nn'}{A^2B^2C^2}$$

und endlich ist

$$G=\frac{1}{A^2B^2C^2}$$

der Werth der Determinante der neun Gröfsen

$$\begin{matrix} S, & T'', & T' \\ T'', & S', & T \\ T', & T, & S''. \end{matrix}$$

Um nun die Werthe der in den neun Differentialgleichungen (a) vorkommenden Gröfsen $L, M, \ldots N'$ zu bestimmen, hat man in dem eben für V aufgestellten Ausdruck die Coordinaten x, y, z zu ersetzen durch ihre Ausdrücke als Functionen von a, b, c; das Resultat dieser Rechnung ist dadurch bemerkenswerth, dafs das Potential V die Functionen der Zeit $l, m, \ldots n''$ nur in den sechs Verbindungen *)

$$P=l^2+l'^2+l''^2;\quad P'=mn+m'n'+m''n''$$

$$Q=m^2+m'^2+m''^2;\quad Q'=nl+n'l'+n''l''$$

$$R=n^2+n'^2+n''^2;\quad R'=lm+l'm'+l''m''$$

*) Der Umstand, dafs hier und im Folgenden der Buchstabe P, welcher schon in §. 1. als Zeichen für den auf der Oberfläche Statt findenden Druck gebraucht wurde, eine ganz andere Bedeutung hat, wird kaum zu einer Verwechslung führen können.

enthält, zwischen welchen aufserdem noch die Determinantengleichung

$$PQR-PP'^2-QQ'^2-RR'^2+2P'Q'R'=1$$

besteht. Die gesuchten Werthe sind nämlich die folgenden:

$$L=\frac{\pi}{A^2}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta^3}+\left(\frac{RP-Q'^2}{B^2}+\frac{PQ-R'^2}{C^2}\right)\frac{\pi}{A^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\Delta^3}+\frac{P\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$M=\frac{\pi}{B^2}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta^3}+\left(\frac{PQ-R'^2}{C^2}+\frac{QR-P'^2}{A^2}\right)\frac{\pi}{B^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\Delta^3}+\frac{Q\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$N=\frac{\pi}{C^2}\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta^3}+\left(\frac{QR-P'^2}{A^2}+\frac{RP-Q'^2}{B^2}\right)\frac{\pi}{C^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\Delta^3}+\frac{R\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$L'=-\frac{(Q'R'-P'P)\pi}{B^2C^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\Delta^3}+\frac{P'\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$M'=-\frac{(R'P'-Q'Q)\pi}{C^2A^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\Delta^3}+\frac{Q'\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\Delta^3}$$

$$N'=-\frac{(P'Q'-R'R)\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty\frac{sds}{\Delta^3}+\frac{R'\pi}{A^2B^2C^2}\int_0^\infty\frac{s^2ds}{\Delta^3},$$

und hierin ist Δ die positive Quadratwurzel aus der Determinante

$$\frac{s^3}{A^2B^2C^2}+\left(\frac{P}{B^2C^2}+\frac{Q}{C^2A^2}+\frac{R}{A^2B^2}\right)s^2+\left(\frac{QR-P'^2}{A^2}+\frac{RP-Q'^2}{B^2}+\frac{PQ-R'^2}{C^2}\right)s+1$$

der neun Gröfsen

$$\begin{array}{ccc} P+\frac{s}{A^2}, & R', & Q', \\ R', & Q+\frac{s}{B^2}, & P', \\ Q', & P', & R+\frac{s}{C^2}. \end{array}$$

Mit Hülfe dieser Formeln läfst sich nun auch die in §. 2 angedeutete Rechnung ausführen, welche den Zweck hat, die Function σ durch die Gröfsen $l, m, \ldots n''$ und deren Derivirte erster Ordnung auszudrücken. Das Resultat dieser etwas mühsamen, aber durchaus nicht schwierigen Operation ist in der Gleichung

$$\left(\frac{QR-P'^2}{A^2}+\frac{RP-Q'^2}{B^2}+\frac{PQ-R'^2}{C^2}\right)\sigma = 2\varepsilon\pi-\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}$$

enthalten, wo das Summenzeichen sich auf alle neun Paare (l,λ), (m,μ), ... (n'',ν'') bezieht. Der Coefficient, mit welchem hier σ behaftet ist, läfst sich in die Form

$$\frac{\lambda^2+\lambda'^2+\lambda''^2}{A^2}+\frac{\mu^2+\mu'^2+\mu''^2}{B^2}+\frac{\nu^2+\nu'^2+\nu''^2}{C^2} = S+S'+S''$$

bringen, woraus unmittelbar hervorgeht, daſs er niemals verschwinden kann, da die Annahme, daſs alle neun Gröſsen $\lambda, \mu, \ldots \nu''$ sich auf Null reduciren, mit der Gleichung

$$\Sigma \pm \lambda \mu' \nu'' = 1$$

im Widerspruch steht.

Um unser System von Formeln zu vervollständigen, bilden wir auch noch die folgenden Ausdrücke für die Coefficienten $g, h, \ldots k''$ in den Geschwindigkeitscomponenten u, v, w:

$$g = \frac{du}{dx} = \lambda \frac{dl}{dt} + \mu \frac{dm}{dt} + \nu \frac{dn}{dt}, \quad g' = \frac{dv}{dx} = \lambda \frac{dl'}{dt} + \mu \frac{dm'}{dt} + \nu \frac{dn'}{dt},$$

$$h = \frac{du}{dy} = \lambda' \frac{dl}{dt} + \mu' \frac{dm}{dt} + \nu' \frac{dn}{dt}, \quad h' = \frac{dv}{dy} = \lambda' \frac{dl'}{dt} + \mu' \frac{dm'}{dt} + \nu' \frac{dn'}{dt},$$

$$k = \frac{du}{dz} = \lambda'' \frac{dl}{dt} + \mu'' \frac{dm}{dt} + \nu'' \frac{dn}{dt}, \quad k' = \frac{dv}{dz} = \lambda'' \frac{dl'}{dt} + \mu'' \frac{dm'}{dt} + \nu'' \frac{dn'}{dt},$$

$$g'' = \frac{dw}{dx} = \lambda \frac{dl''}{dt} + \mu \frac{dm''}{dt} + \nu \frac{dn''}{dt},$$

$$h'' = \frac{dw}{dy} = \lambda' \frac{dl''}{dt} + \mu' \frac{dm''}{dt} + \nu' \frac{dn''}{dt},$$

$$k'' = \frac{dw}{dz} = \lambda'' \frac{dl''}{dt} + \mu'' \frac{dm''}{dt} + \nu'' \frac{dn''}{dt}.$$

Die Bedingung der Incompressibilität giebt dann zunächst die Gleichung

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

und für das letzte Glied in der zur Bestimmung von σ dienenden Gleichung findet man den Ausdruck

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma \frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dx}\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dz}\frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right) + \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dy} + \frac{dw}{dx}\frac{du}{dz} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dx},$$

der uns dazu dienen wird, die am Ende des §. 2. ausgesprochene Behauptung zu rechtfertigen.

Auſserdem mag noch bemerkt werden, daſs die Rotationen p', q', r' um die drei Coordinatenaxen, in welche sich die augenblickliche Rotation zerlegen läſst, die Werthe

$$p' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}\right), \quad q' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}\right), \quad r' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right)$$

haben.

§. 5.

Wir gehen nun über zu der Aufstellung von sieben Integralen erster Ordnung, welche stets gelten, ohne besondere Voraussetzungen über den anfänglichen Bewegungszustand zu machen. Drei derselben ergeben sich unmittelbar aus den Differentialgleichungen (a.), wenn man je zwei derselben, welche rechts dasselbe Glied $-2L'\varepsilon$, $-2M'\varepsilon$, $-2N'\varepsilon$ enthalten, von einander abzieht; auf diese Weise erhält man

$$
\text{(I.)}\quad \begin{cases}
m\dfrac{dn}{dt}-n\dfrac{dm}{dt}+m'\dfrac{dn'}{dt}-n'\dfrac{dm'}{dt}+m''\dfrac{dn''}{dt}-n''\dfrac{dm''}{dt}=\mathfrak{A}=\left(\dfrac{dn'}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{dm''}{dt}\right)_0,\\[2ex]
n\dfrac{dl}{dt}-l\dfrac{dn}{dt}+n'\dfrac{dl'}{dt}-l'\dfrac{dn'}{dt}+n''\dfrac{dl''}{dt}-l''\dfrac{dn''}{dt}=\mathfrak{B}=\left(\dfrac{dl''}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{dn}{dt}\right)_0,\\[2ex]
l\dfrac{dm}{dt}-m\dfrac{dl}{dt}+l'\dfrac{dm'}{dt}-m'\dfrac{dl'}{dt}+l''\dfrac{dm''}{dt}-m''\dfrac{dl''}{dt}=\mathfrak{C}=\left(\dfrac{dm}{dt}\right)_0-\left(\dfrac{dl'}{dt}\right)_0.
\end{cases}
$$

Will man die Componenten u, v, w der Geschwindigkeit an der Stelle (x,y,z) und ihre nach den Coordinaten x, y, z genommenen partiellen Derivirten einführen, so lassen sich diese Integrale mit Hülfe der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Ausdrücke leicht in die folgende Form bringen *)

$$
\begin{aligned}
\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy} &= \mathfrak{A}l+\mathfrak{B}m+\mathfrak{C}n,\\
\frac{dw}{dx}-\frac{du}{dz} &= \mathfrak{A}l'+\mathfrak{B}m'+\mathfrak{C}n',\\
\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx} &= \mathfrak{A}l''+\mathfrak{B}m''+\mathfrak{C}n'',
\end{aligned}
$$

aus welcher unmittelbar hervorgeht, dafs die Axe der augenblicklichen Rotation stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet wird und dafs, wenn die drei links stehenden Gröfsen zu irgend einer Zeit gleichzeitig verschwinden, d. h. wenn keine Rotation Statt findet, dasselbe für die ganze Dauer der Bewegung gilt; die Bedingungen, welchen der Anfangszustand der Bewegung in diesem Falle unterliegt, sind in den Gleichungen

$$
\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0=\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0,\qquad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0=\left(\frac{dn}{dt}\right)_0,\qquad \left(\frac{dm}{dt}\right)_0=\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0
$$

ausgesprochen, und man erkennt unmittelbar aus dem im vorigen §. mitgetheilten Ausdruck für die Function σ, dafs dieselbe während der ganzen Be-

*) Vergl. die Anmerkung zu der Einleitung.

wegung nur positive Werthe annimmt; hiermit ist also die Richtigkeit der am Ende des §. 2. aufgestellten Behauptung nachgewiesen *).

Da ferner in unserem Problem die wirkenden Kräfte nur von der wechselseitigen Anziehung der Elemente der flüssigen Masse herrühren, so liefert uns das Princip der Fläche drei Integrale

$$\int\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)d\tau=\text{const.},\quad \int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)d\tau=\text{const.},$$
$$\int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)d\tau=\text{const.},$$

in welchen die Integrationen über alle Elemente $d\tau$ der flüssigen Masse auszudehnen sind. Drückt man die Coordinaten x, y, z durch die ursprünglichen Coordinaten a, b, c aus, indem man das anfängliche Ellipsoid in unendlich kleine Elemente $d\tau = da\,db\,dc$ zerlegt, und berücksichtigt, dafs

$$\int a^2\,d\tau=\frac{\mathfrak{M}}{5}\cdot A^2,\quad \int b^2\,d\tau=\frac{\mathfrak{M}}{5}\cdot B^2,\quad \int c^2\,d\tau=\frac{\mathfrak{M}}{5}\cdot C^2,$$
$$\int bc\,d\tau=0,\quad \int ca\,d\tau=0,\quad \int ab\,d\tau=0$$

ist, wo $\mathfrak{M}$ zur Abkürzung für die Gesammtmasse $\frac{4\pi ABC}{3}$ gesetzt ist, so nehmen diese Integrale die folgende Form an:

$$\text{(II.)}\quad\begin{cases} A^2\left(l'\frac{dl''}{dt}-l''\frac{dl'}{dt}\right)+B^2\left(m'\frac{dm''}{dt}-m''\frac{dm'}{dt}\right)+C^2\left(n'\frac{dn''}{dt}-n''\frac{dn'}{dt}\right)\\ \qquad =\mathfrak{K}=B^2\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0-C^2\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0,\\ A^2\left(l''\frac{dl}{dt}-l\frac{dl''}{dt}\right)+B^2\left(m''\frac{dm}{dt}-m\frac{dm''}{dt}\right)+C^2\left(n''\frac{dn}{dt}-n\frac{dn''}{dt}\right)\\ \qquad =\mathfrak{K}'=C^2\left(\frac{dn}{dt}\right)_0-A^2\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0,\\ A^2\left(l\frac{dl'}{dt}-l'\frac{dl}{dt}\right)+B^2\left(m\frac{dm'}{dt}-m'\frac{dm}{dt}\right)+C^2\left(n\frac{dn'}{dt}-n'\frac{dn}{dt}\right)\\ \qquad =\mathfrak{K}''=A^2\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0-B^2\left(\frac{dm}{dt}\right)_0.\end{cases}$$

Setzt man die in dem vorhergehenden §. mitgetheilten Ausdrücke für die Gröfsen $L, M, \ldots N'$ als bekannt voraus, so ergeben sich die vorstehen-

*) Es mag beiläufig bemerkt werden, dafs die drei Integralgleichungen (I.) hinreichen, um aus den neun Differentialgleichungen (a.) sechs andere abzuleiten, welche die neun Functionen $l, m, \ldots n''$ nur noch in den sechs Verbindungen $P, Q, \ldots R'$, und aufserdem noch die Gröfse σ enthalten.

den Integralgleichungen auch aus unseren Differentialgleichungen (a.) durch eine etwas mühsame Rechnung, bei welcher vorzüglich zu berücksichtigen ist, dafs zwischen den Gröfsen $L, M, \ldots N'$ und $P, Q, \ldots R'$ folgende Relationen Statt finden

$$\begin{aligned}
A^2(R'M'-Q'N')+B^2(QL'-P'M)+C^2(P'N-RL') &= 0\\
A^2(Q'L-PM')+B^2(P'N'-R'L')+C^2(RM'-Q'N) &= 0\\
A^2(PN'-R'L)+B^2(R'M-QN')+C^2(Q'L'-P'M') &= 0,
\end{aligned}$$

von denen nur eine verificirt zu werden braucht, weil aus ihr die beiden andern durch einfache Permutation abgeleitet werden können.

Das siebente Integral wird uns endlich durch das Princip der lebendigen Kraft geliefert, welches nach der Natur der in unserem Problem wirkenden Kräfte durch die Gleichung

$$\int\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)d\tau = \text{Const.}+\varepsilon\int V\,dt$$

ausgedrückt wird, in welcher die Integrationen über alle Elemente $d\tau$ der bewegten Masse auszudehnen sind; die wirkliche Ausführung derselben, wie sie sogleich angedeutet werden soll, giebt dann das Resultat

$$\text{(III.)}\quad \left\{\begin{aligned}
&A^2\left(\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dl''}{dt}\right)^2\right)\\
+&B^2\left(\left(\frac{dm}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm''}{dt}\right)^2\right)\\
+&C^2\left(\left(\frac{dn}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2\right)
\end{aligned}\right\} = \text{Const.}+4\varepsilon\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}.$$

Auf der linken Seite kann man nämlich das frühere Verfahren anwenden, indem man den ursprünglich von der Masse erfüllten Raum in unendlich kleine Elemente $d\tau = da\,db\,dc$ zerlegt, und die Integrationen in Bezug auf die Variabeln a, b, c ausführt; man erhält dann unmittelbar, nach Unterdrückung des constanten Factors $\frac{\mathfrak{M}}{5}$, den auf der linken Seite der Gleichung (III.) befindlichen Ausdruck. Auf der rechten Seite würde man durch dasselbe Verfahren zunächst

$$\int V d\tau = \mathfrak{M}\left(H-\frac{A^2L+B^2M+C^2N}{5}\right)$$

finden; aus den in §. 4. gegebenen Ausdrücken für L, M, N ergiebt sich ferner ohne Schwierigkeit

$$A^2L+B^2M+C^2N = H = \pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta},$$

also

$$\int V d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5} \cdot 4\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta},$$

woraus denn unmittelbar die Richtigkeit der Integralgleichung (III.) erhellt. Allein man kann auch ohne Hülfe der Ausdrücke für L, M, N den Werth des auf sich selbst bezogenen Potentials der flüssigen Masse leicht auf folgende Weise finden. Ist nämlich

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2} = 1$$

die Gleichung des auf seine Hauptaxen bezogenen Ellipsoides, welches augenblicklich die flüssige Masse begrenzt, so ist der Werth des Potentiales im innern Punkte (x', y', z')

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{x'^2}{\alpha^2+s} - \frac{y'^2}{\beta^2+s} - \frac{z'^2}{\gamma^2+s}\right),$$

wo Δ die positive Quadratwurzel aus dem Ausdruck

$$\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)$$

bedeutet. Zerlegt man nun die ganze Masse in unendlich kleine Elemente $d\tau = dx'\,dy'\,dz'$, und bedenkt, dafs

$$\int d\tau = \frac{4\pi\alpha\beta\gamma}{3} = \frac{4\pi ABC}{3} = \mathfrak{M};\ \int x'^2\,d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\alpha^2,\ \int y'^2\,d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\beta^2,\ \int z'^2 d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5}\gamma^2$$

ist, so findet man zunächst

$$\int V d\tau = \mathfrak{M}\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \tfrac{1}{5}\frac{\alpha^2}{\alpha^2+s} - \tfrac{1}{5}\frac{\beta^2}{\beta^2+s} - \tfrac{1}{5}\frac{\gamma^2}{\gamma^2+s}\right);$$

nun ist aber

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+s} + \frac{\beta^2}{\beta^2+s} + \frac{\gamma^2}{\gamma^2+s} = 3 - s\left(\frac{1}{\alpha^2+s} + \frac{1}{\beta^2+s} + \frac{1}{\gamma^2+s}\right) = 3 - s\,\frac{d\log(\Delta^2)}{ds}$$

$$= 3 - 2\frac{s}{\Delta}\frac{d\Delta}{ds}$$

und hierdurch geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$\int V d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5} 2\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 + \frac{s}{\Delta}\frac{d\Delta}{ds}\right),$$

und da ferner durch theilweise Integration leicht bewiesen wird, dafs

$$\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta^2} \cdot \frac{d\Delta}{ds} = -\int_0^\infty s\,\frac{d\left(\frac{1}{\Delta}\right)}{ds} \cdot ds = \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}$$

ist, so erhält man endlich wieder

$$\int V d\tau = \frac{\mathfrak{M}}{5} \cdot 4\pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta},$$

und hierin ist nach bekannten Sätzen

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1+\frac{s}{\alpha^2}, & 0, & 0 \\ 0, & 1+\frac{s}{\beta^2}, & 0 \\ 0, & 0, & 1+\frac{s}{\gamma^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ss+1, & T''s, & T's \\ T''s, & S's+1, & Ts \\ T's, & Ts, & S''s+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P+\frac{s}{A^2}, & R', & Q' \\ R', & Q+\frac{s}{B^2}, & P' \\ Q', & P', & R+\frac{s}{C^2} \end{vmatrix}$$

wenn man sich einer üblichen Bezeichnungsweise der Determinanten bedient.

Natürlich läfst sich die Gleichung (III.) auch ohne das Prinzip der lebendigen Kraft anzuwenden, aus den Differentialgleichungen (a) ableiten; man bedarf aber dann der im §. 4 gegebenen Ausdrücke für die Gröfsen L, M, .. N', und aufserdem ist die Rechnung sehr beschwerlich.

§. 6.

Bei der grofsen Complication der Differentialgleichungen (a) wird man eine vollständige Lösung des Problems wohl nur unter besonders einfachen Voraussetzungen über den anfänglichen Zustand der flüssigen Masse erreichen können; wir werden uns daher im Folgenden nur noch mit solchen speciellen Fällen beschäftigen. Eine solche einfache Voraussetzung ist diejenige, dafs im Anfang der Bewegung sowohl hinsichtlich der Gestalt als auch des Bewegungszustandes vollständige Symmetrie in Bezug auf eine bestimmte Axe Statt findet; es leuchtet nämlich ein, dafs dann dasselbe für die ganze Dauer der Bewegung gelten wird. Dazu ist zunächst erforderlich, dafs die Masse ursprünglich durch ein Rotationsellipsoid begrenzt wird, dafs also die Axe der Symmetrie eine der drei Hauptaxen des ursprünglichen Ellipsoides ist; wir wollen annehmen, es sei dies die Axe C, so dafs $B = A$ ist. Denkt man sich ferner an jedem Punkte a, b, c die Anfangsgeschwindigkeit, deren Componenten

$$u = \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 a + \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 b + \left(\frac{dn}{dt}\right)_0 c,$$

$$v = \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 a + \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 b + \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 c,$$

$$w = \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 a + \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 b + \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 c$$

sind, nach Gröfse und Richtung construirt, so darf durch eine beliebige

Drehung φ des Coordinatensystems um die Axe der c Nichts geändert werden, d. h. wenn a, b resp. in $a\cos\varphi - b\sin\varphi$, $a\sin\varphi + b\cos\varphi$ übergehen, ohne dafs c sich ändert, so mufs u in $u\cos\varphi - v\sin\varphi$, v in $u\sin\varphi + v\cos\varphi$ übergehen, und w ungeändert bleiben, wenn der Bewegungszustand wirklich symmetrisch in Bezug auf die Axe der c sein soll. Dies giebt folgende Bedingungen:

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dl}{dt}\right)_0; \quad \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dm}{dt}\right)_0,$$

zu welchen in Folge der Incompressibilität noch

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 = 0$$

kommt. Der Anfangszustand der Bewegung wird daher durch Gleichungen von der Form

$$u = ga + hb, \quad v = -ha + gb, \quad w = -2gc$$

ausgedrückt. Die beiden Theilbewegungen, in welche jede solche Bewegung zerlegbar ist, werden daher folgende Componenten haben:

$$u_1 = ga, \quad v_1 = gb, \qquad w_1 = -2gc$$
$$u_2 = hb, \quad v_2 = -ha, \quad w_2 = 0,$$

woraus sich ergiebt, wie sich erwarten liefs, dafs die Theilchen der flüssigen Masse aufser einer Rotation um die Axe der Symmetrie, eine derselben parallele Bewegung $-2gc$ und eine auf ihr senkrechte $g\sqrt{a^2+b^2}$ besitzen, deren Richtung durch die Axe selbst hindurch geht.

Sind diese Bedingungen für den Anfangszustand erfüllt, so wird dieselbe Symmetrie auch für die ganze Dauer der Bewegung gelten; alle Theilchen, welche ursprünglich eine symmetrische Lage in Bezug auf die Axe der c einnehmen, d. h. für welche a^2+b^2 und c constant sind, werden zu jeder spätern Zeit in derselben Beziehung stehen, so dafs wieder x^2+y^2 und z für diese Theilchen dieselben Werthe besitzen. Diese Eigenschaften der linearen Functionen x, y, z der ursprünglichen Coordinaten a, b, c haben zur Folge, dafs stets

$$n = 0, \quad n' = 0, \quad l'' = 0, \quad m'' = 0,$$
$$m' = l, \quad l' = -m$$

sein mufs, so dafs diese linearen Ausdrücke folgende Form annehmen:

$$x = la + mb, \quad y = -ma + lb, \quad z = n''c$$

und offenbar sind die Bedingungen, welche hieraus für die anfänglichen Werthe der Derivirten $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dm}{dt}$, ... $\frac{dn''}{dt}$ folgen, identisch mit den soeben aufgestellten. Die Bedingung der Incompressibilität besteht in der Gleichung

$$(l^2+m^2)n''=1;$$

und folglich erhält man durch Umkehrung der vorstehenden Gleichungen

$$a=ln''x-mn''y;\quad b=mn''x+ln''y;\quad c=\frac{1}{n''}z.$$

Die Gleichung des augenblicklichen Ellipsoides ist daher

$$\frac{n''}{A^2}(x^2+y^2)+\frac{z^2}{C^2n''^2}=1$$

und die Componenten der Geschwindigkeit haben die Form

$$u=\frac{dl}{dt}a+\frac{dm}{dt}b=-\frac{1}{2n''}\frac{dn''}{dt}x+n''\Big(l\frac{dm}{dt}-m\frac{dl}{dt}\Big)y,$$

$$v=-\frac{dm}{dt}a+\frac{dl}{dt}b=-n''\Big(l\frac{dm}{dt}-m\frac{dl}{dt}\Big)x-\frac{1}{2n''}\frac{dn''}{dt}y,$$

$$w=\frac{dn''}{dt}c=\frac{1}{n''}\frac{dn''}{dt}z,$$

wodurch wieder ausgedrückt wird, dafs Gestalt und Bewegungszustand zu jeder Zeit symmetrisch in Bezug auf die Axe der c oder z ist; besonders bemerken wollen wir noch, dafs

$$n''\Big(l\frac{dm}{dt}-m\frac{dl}{dt}\Big)=\tfrac{1}{2}\Big(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\Big)=\omega$$

das Mafs für die augenblickliche Rotation um die Axe der z ist.

Wir haben jetzt zu untersuchen, in welcher Weise unsere Hypothese über die Natur der Bewegung mit den Fundamentalgleichungen (a.) in Uebereinstimmung zu bringen ist. Da in unserer Annahme das Potential V für einen innern Punkt durch die Gleichung

$$V=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\Big(1-\frac{n''(x^2+y^2)}{A^2+n''s}-\frac{z^2}{C^2n''^2+s}\Big)=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\Big(1-\frac{a^2+b^2}{A^2+n''s}-\frac{n''^2c^2}{C^2n''^2+s}\Big)$$

ausgedrückt wird, in welcher

$$\Delta=\Big(1+\frac{n''s}{A^2}\Big)\sqrt{1+\frac{s}{C^2n''^2}}$$

ist, so erhält man für die Gröfsen $L, M, \ldots N'$ folgende Werthe:

$$L=M=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{A^2+n''s},\quad N=\pi\int_0^\infty\frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{n''^2}{C^2n''^2+s},$$

$$L'=0,\quad M'=0,\quad N'=0.$$

Hieraus folgt, dafs vier von den neun Differentialgleichungen (a.) durch unsere Hypothese identisch erfüllt sind, während die fünf übrigen sich auf die drei folgenden von einander wesentlich verschiedenen reduciren:

$$l\frac{d^2l}{dt^2}+m\frac{d^2m}{dt^2}=\frac{2\sigma}{A^2}-2\varepsilon L;\quad n''\frac{d^2n''}{dt^2}=\frac{2\sigma}{C^2}-2\varepsilon N;\quad l\frac{d^2m}{dt^2}-m\frac{d^2l}{dt^2}=0,$$

welche in Verbindung mit der schon vorher aufgestellten Bedingung der Incompressibilität zur Bestimmung der vier Functionen l, m, n'', σ vollständig hinreichen, wie aus den in §. 2. gegebenen Andeutungen erhellt.

Nachdem so die Zulässigkeit unserer Hypothese nachgewiesen ist, schreiten wir zur vollständigen Lösung des entsprechenden Problems, indem wir dasselbe auf eine Quadratur zurückführen. Die letzte der drei vorstehenden Differentialgleichungen hat das Integral (vergl. §. 5. I.)

$$l\frac{dm}{dt}-m\frac{dl}{dt}=\left(\frac{dm}{dt}\right)_0=\omega_0,$$

und hieraus ergiebt sich die Folgerung, dafs die Rotationsgeschwindigkeit $\omega=\omega_0 n''$ stets proportional der Länge der Rotationsaxe Cn'' des Ellipsoides ist. Durch zweimalige Differentiation der Gleichung

$$l^2+m^2=\frac{1}{n''}$$

erhält man ferner

$$l\frac{dl}{dt}+m\frac{dm}{dt}=-\frac{1}{2n''^2}\frac{dn''}{dt};\quad l\frac{d^2l}{dt^2}+m\frac{d^2m}{dt^2}+\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2=-\frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2}+\frac{1}{n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2;$$

quadrirt man die erste dieser beiden Gleichungen, und addirt dazu das Quadrat der vorstehenden Integralgleichung, so erhält man

$$\frac{1}{n''}\left\{\left(\frac{dl}{dt}\right)^2+\left(\frac{dm}{dt}\right)^2\right\}=\omega_0^2+\frac{1}{4n''^4}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2;$$

und hierdurch geht die zweite Gleichung in die folgende über:

$$l\frac{d^2l}{dt^2}+m\frac{d^2m}{dt^2}=-\omega_0^2 n''+\frac{3}{4n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2-\frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2}.$$

Auf diese Weise gelingt es, die beiden Functionen l und m vollständig zu eliminiren, und wir erhalten zur Bestimmung der Functionen n'', σ die beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$-\frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2}+\frac{3}{4n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2-\omega_0^2 n''=\frac{2\sigma}{A^2}-2\varepsilon L;\quad n''\frac{d^2n''}{dt^2}=\frac{2\sigma}{C^2}-2\varepsilon N,$$

in welchen die Gröfsen L, N nur noch von der Variabeln n'' abhängen. Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen $\frac{d^2n''}{dt^2}$, indem man die erste

mit n'', die zweite mit $\frac{1}{2n''^2}$ multiplicirt und dann addirt, so erhält man nach Substitution der Ausdrücke für L und N die Gleichung

$$\sigma\left\{\frac{2n''}{A^2}+\frac{1}{C^2n''^2}\right\} = 2\varepsilon\pi - \omega_0^2 n''^2 + \tfrac{3}{4}\frac{1}{n''^2}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2,$$

welche mit der im §. 4. gegebenen übereinstimmt. Eliminirt man dagegen σ aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, indem man die zweite mit $\frac{C^2}{n''}$, die erste mit $\frac{A^2}{n''}$ multiplicirt, und dann subtrahirt, so erhält man die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\left(\frac{A^2}{2n''^3}+C^2\right)\frac{d^2n''}{dt^2} - \tfrac{3}{4}\frac{A^2}{n''^4}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 + A^2\omega_0^2 = 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta}\cdot\frac{A^2-C^2n''^2}{n''(A^2+n''s)(C^2n''^2+s)};$$

multiplicirt man dieselbe mit $2\frac{dn''}{dt}$, so läfst sich eine Integration ausführen, deren Resultat

$$\left(\frac{A^2}{2n''^3}+C^2\right)\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2 + 2A^2\omega_0^2 n'' = \text{Const.} + 4\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}$$

offenbar nichts Anderes ist, als das durch das Princip der lebendigen Kraft gegebene Integral.

Um nun diese Gleichungen, durch welche das Problem in der That auf Quadraturen zurückgeführt ist, bequem discutiren zu können, ist es zweckmäfsig, das Verhältnifs

$$\alpha = \frac{Cn''}{\sqrt[3]{A^2C}} = n''\sqrt[3]{\frac{C^2}{A^2}} = n''\alpha_0$$

der Rotationsaxe Cn'' des Ellipsoides zu dem Radius $D=\sqrt[3]{A^2C}$ der Kugel, deren Volumen dem des Ellipsoides gleich ist, als neue Variabele einzuführen. Ferner wollen wir

$$\varrho = \frac{\omega}{\sqrt{2\varepsilon\pi}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\varepsilon\pi}}n'' = \frac{\varrho_0}{\alpha_0}\alpha$$

setzen. Ersetzt man endlich die Integrationsvariabele s durch D^2s, und führt zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$f(\alpha) = \int_0^\infty \frac{ds}{(1+\alpha s)\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)}},\quad \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = f'(\alpha) = \left(\frac{1}{\alpha^3}-1\right)\int_0^\infty \frac{s\,ds}{(1+\alpha s)^2\sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)^3}},$$

so nehmen die drei zuletzt erhaltenen Gleichungen folgende Formen an:

$$
\text{(b)} \quad \begin{cases} \dfrac{\sigma}{D^2}\left(2\alpha + \dfrac{1}{\alpha^2}\right) = 2\varepsilon\pi(1-\varrho^2) + \frac{3}{4}\left(\dfrac{1}{\alpha}\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2, \\ 2\left(2+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)\dfrac{d^2\alpha}{dt^2} - \dfrac{3}{\alpha^4}\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\varepsilon\pi\left\{\dfrac{\varrho_0^2}{\alpha_0^2} - f'(\alpha)\right\} = 0, \\ \left(2+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)\left(\dfrac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\varepsilon\pi\left\{\dfrac{\varrho_0^2}{\alpha_0^2}\alpha - f(\alpha)\right\} = 8\varepsilon\pi K, \end{cases}
$$

wo K eine Constante bezeichnet, deren Werth von ϱ_0, α_0, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ abhängt. Für die Discussion selbst ist es nothwendig einige zum Theil schon bekannte Eigenschaften der Function $f(\alpha)$ vorauszuschicken. Durch wirkliche Ausrechnung des bestimmten Integrals erhält man

$$
f(\alpha) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^3}-1\right)}} \operatorname{arctang} \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^3}-1\right)},
$$

oder

$$
f(\alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\left(1-\frac{1}{\alpha^3}\right)}} \log \frac{1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{\alpha^3}\right)}}{1-\sqrt{\left(1-\frac{1}{\alpha^3}\right)}},
$$

je nachdem $\alpha < 1$ oder $\alpha > 1$ ist; für $\alpha = 1$ nehmen beide Formen denselben Werth $f(1) = 2$ an; wird α unendlich klein oder unendlich grofs, so wird $f(\alpha)$ unendlich klein; und aus dem obigen Ausdruck für $f'(\alpha)$ geht hervor, dafs $f(\alpha)$ ein und nur ein Maximum $f(1) = 2$ hat. Ist daher p irgend ein zwischen 0 und 2 liegender Werth, so hat die Gleichung $f(\alpha) = p$ zwei Wurzeln, von denen eine unter, die andere über der Einheit liegt. Ferner überzeugt man sich leicht, dafs, wenn α von 0 bis 1 wächst, die Function $f'(\alpha)$ beständig von $+\infty$ bis 0 abnimmt und dann für $\alpha > 1$ negativ wird, so dafs, wenn q irgend ein positiver Werth ist, die Gleichung $f'(\alpha) = q$ stets eine und nur eine Wurzel hat, und zwar liegt dieselbe unter der Einheit. Endlich ist aus den früheren Untersuchungen über die gleichförmige Rotation einer flüssigen Masse bekannt, dafs die Function $\alpha^2 f'(\alpha)$ ein Maximum $= 0{,}2246\ldots$ hat.

§. 7.

Betrachten wir nun zunächst denjenigen speciellen Fall, in welchem ursprünglich, und folglich auch während der ganzen Bewegung keine Rotation Statt findet, also

$$
\varrho_0 = 0
$$

ist. Nehmen wir aufserdem vorläufig noch an *), dafs ursprünglich gar keine Geschwindigkeit vorhanden, also auch

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0$$

ist, so haben wir die Gleichungen

$$\frac{\sigma}{D^2}\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 2\varepsilon\pi + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

$$2\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 8\varepsilon\pi f'(\alpha),$$

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 8\varepsilon\pi\{f(\alpha) - f(\alpha_0)\}.$$

Aus der letzten derselben folgt, dafs während der ganzen Bewegung $f(\alpha) \geqq f(\alpha_0)$ sein mufs; ist daher ursprünglich $\alpha_0 = 1$, d. h. ist die ursprüngliche Gestalt der ruhenden flüssigen Masse eine Kugel, so folgt, dafs stets $\alpha = \alpha_0 = 1$ bleiben mufs. Nehmen wir dagegen an, dafs $\alpha < 1$, dafs also die ursprüngliche Gestalt ein abgeplattetes Sphäroid ist, so ergiebt sich, dafs während der ganzen Bewegung $\alpha_0 \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ sein mufs, wo α_1 die zweite Wurzel der Gleichung $f(\alpha) = f(\alpha_0)$ bedeutet, von der wir wissen, dafs sie über der Einheit liegt. In der That wird nun α alle Werthe des Intervalls von α_0 bis α_1, und wieder zurück von α_1 bis α_0 periodisch, und jedesmal nach Verlauf derselben Zeit

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} d\alpha \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{\alpha^3}}{f(\alpha) - f(\alpha_0)}}$$

durchlaufen; man überzeugt sich hiervon sogleich, wenn man bedenkt, dafs $\frac{d\alpha}{dt}$ nur dann sein Zeichen ändern kann, wenn $\alpha = \alpha_0$ oder $= \alpha_1$ ist, und dafs $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ im ersten Falle einen positiven, im zweiten einen negativen Werth hat, und wenn man ferner berücksichtigt, dafs der vorstehende Werth von τ endlich ist, da an den Grenzen des bestimmten Integrals die Function $f(\alpha) - f(\alpha_0)$ von derselben Ordnung unendlich klein wird, wie $\alpha - \alpha_0$ oder $\alpha - \alpha_1$. Die Bewegung besteht also aus isochronen Schwingungen, in welchen die Flüssigkeit durch die Kugelgestalt hindurchgehend abwechselnd die Form eines verlängerten und die eines abgeplatteten Ellipsoids annimmt. Natürlich würde

*) Das Resultat der Untersuchung für diesen Fall ist von *Dirichlet* in der vorläufigen Anzeige der Abhandlung vollständig ausgesprochen.

die Bewegung genau dieselbe sein, wenn das Sphäroid ursprünglich ein verlängertes wäre; es würde dann nur α_0 mit α_1 zu vertauschen sein.

Der Charakter der Bewegung bleibt auch dann noch derselbe, wenn das Sphäroid seine Bewegung nicht aus der Ruhe beginnt, wenn nur die Anfangsgeschwindigkeit in Bezug auf die Anfangsgestalt unterhalb einer gewissen Grenze liegt, welche durch die Bedingung

$$\left(2+\frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 < 8\varepsilon\pi f(\alpha_0)$$

bestimmt wird. Ist dagegen diese Bedingung nicht erfüllt, also

$$\left(2+\frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 \geqq 8\varepsilon\pi f(\alpha_0),$$

so kann $\frac{d\alpha}{dt}$ nach Verlauf einer endlichen Zeit niemals verschwinden; denn bezeichnet k eine nicht negative Constante, so wird das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}}\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha \sqrt{\frac{2+\frac{1}{\alpha^3}}{f(\alpha)+k}}$$

mit unendlich wachsendem α, und das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}}\int_{\alpha}^{\alpha_0} d\alpha \sqrt{\frac{2+\frac{1}{\alpha^3}}{f(\alpha)+k}}$$

mit unendlich abnehmendem α über alle Grenzen wachsen. Ist daher $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ positiv, so wird $\frac{d\alpha}{dt}$ stets positiv bleiben und sich unbegrenzt dem Werth

$$\sqrt{\left(1+\frac{1}{2\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 - 4\varepsilon\pi f(\alpha_0)}$$

nähern, während α mit t unbegrenzt wächst; das Ellipsoid wird sich also unbegrenzt verlängern. Ist dagegen $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ negativ, so wird $\frac{d\alpha}{dt}$ stets negativ bleiben und dem absoluten Werth nach mit α unbegrenzt abnehmen, während t über alle Grenzen wächst; das Ellipsoid wird sich daher unbegrenzt abplatten.

In allen diesen Fällen wird aber die Function σ niemals negative Werthe annehmen, so dafs diese Bewegungen ohne Annahme eines äufsern Druckes physisch möglich sind.

§. 8.

Wir wollen jetzt zu dem Fall übergehen, in welchem ϱ_0 von Null verschieden ist, also während der ganzen Bewegung Rotation Statt findet. Zufolge der am Ende des §. 6. angeführten Eigenschaften der Function $f(\alpha)$ und ihrer Derivirten $f'(\alpha)$ giebt es stets einen und nur einen Werth δ, welcher der Gleichung

$$f'(\delta) = \frac{\varrho_0^2}{\alpha_0^2}$$

genügt, und zwar ist $0 < \delta < 1$. Betrachten wir nun die Function

$$\psi(\alpha) = f'(\delta)\alpha - f(\alpha),$$

so ergiebt sich leicht, dafs $\psi(o) = 0$ und dafs $\psi(\alpha)$, wenn α von 0 bis δ wächst, beständig abnimmt, also negativ wird und für $\alpha = \delta$ den kleinsten Werth $\psi(\delta)$ erreicht, der also ebenfalls negativ ist; wächst dann α weiter, so wächst auch $\psi(\alpha)$ und zwar mit α über alle Grenzen. Die Gleichungen der Bewegung nehmen nun die folgenden Formen an:

$$\frac{\sigma}{D^2}\left(2\alpha + \frac{1}{\alpha^2}\right) = 2\varepsilon\pi(1 - f'(\delta)\alpha^2) + \tfrac{3}{4}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

$$2\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{3}{\alpha^4}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\varepsilon\pi\psi'(\alpha) = 0$$

$$\left(2 + \frac{1}{\alpha^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 8\varepsilon\pi\psi(\alpha) = 8\varepsilon\pi[\psi(\alpha_0) + k],$$

in denen zur Abkürzung

$$\frac{d\psi(\alpha)}{d\alpha} = f'(\delta) - f'(\alpha) = \psi'(\alpha); \quad \left(2 + \frac{1}{\alpha_0^3}\right)\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0^2 = 8\varepsilon\pi k$$

gesetzt ist. Hieraus geht zunächst hervor, dafs für die ganze Dauer der Bewegung

$$\psi(\alpha) \leqq \psi(\alpha_0) + k$$

und folglich α stets unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze liegen mufs; das Vorhandensein auch der geringsten anfänglichen Rotationsbewegung verhindert also eine unbegrenzte Verlängerung des Sphäroides.

Da ferner $\psi(\delta)$ der algebraisch kleinste Werth der Function $\psi(\alpha)$ ist, so haben wir je nach dem Werth der Constante $\psi(\alpha_0) + k$ nur drei Fälle zu unterscheiden.

$$(1.) \quad \psi(\alpha_0) + k = \psi(\delta).$$

Dies ist, da k nicht negativ sein kann, nur dann möglich, wenn $k = 0$,

und $\alpha_0 = \delta$, also

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0 = 0 \text{ und } \varrho_0^2 = \alpha_0^2 f'(\alpha_0), \text{ also } \alpha_0 < 1$$

ist; in diesem Falle mufs α constant $= \alpha_0$ bleiben, so dafs die Bewegung in einer gleichförmigen Rotation eines abgeplatteten Sphäroides von unveränderlicher Gestalt um die kleine Axe besteht, was der zuerst von ***Maclaurin*** behandelte Fall ist. Bekanntlich ist erforderlich, dafs der Werth von ϱ_0^2 einen bestimmten numerischen Werth 0,2246 .. nicht übersteigt; für jeden unterhalb dieser Grenze liegenden Werth von ϱ_0^2 existiren zwei verschiedene entsprechende Sphäroide, die identisch werden, wenn ϱ_0^2 diesen Grenzwerth selbst erreicht. Ferner leuchtet ein, dafs die Gröfse σ dann einen unveränderlichen positiven Werth hat, dafs also die Bewegung wieder ohne einen äufseren Druck physisch möglich ist. Endlich ergiebt sich auch umgekehrt, dafs α nur unter den Bedingungen dieses Falles constant sein kann.

$$(2.) \qquad \psi(\delta) < \psi(\alpha_0) + k < 0.$$

Dieser Fall ist, da k nicht negativ sein kann, nur dann möglich, wenn

$$\varrho_0^2 < \alpha_0 f(\alpha_0)$$

und aufserdem der absolute Werth von $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_0$ eine von ϱ_0 und α_0 abhängige Grenze nicht übersteigt. Die Gleichung $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_0) + k$ hat dann zwei bestimmte Wurzeln α' und $\alpha'' > \alpha'$, und zwar ist $0 < \alpha' < \delta$. Hieraus folgt, dafs α stets zwischen den beiden Grenzen α' nnd α'' liegen mufs, und in der That wird α abwechselnd diese beiden Grenzwerthe, stets nach Verlauf derselben Zeit

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{8\varepsilon\pi}} \int_{\alpha'}^{\alpha''} d\alpha \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{\alpha^3}}{k + \psi(\alpha_0) - \psi(\alpha)}}$$

erreichen; die Rotationsgeschwindigkeit ist bei dem Minimumwerth α' zu klein, bei dem Maximumwerth α'' zu grofs, als dafs die flüssige Masse ihre augenblickliche Gestalt beibehalten könnte. Auch ist zu bemerken, dafs, wenn die Rotationsgeschwindigkeit im Augenblicke der gröfsten Verlängerung des Sphäroides einen gewissen Werth übersteigt, diese Bewegung nur unter der Wirkung eines hinreichend starken äufseren Druckes physisch möglich ist.

$$(3.) \qquad \psi(\alpha_0) + k \geqq 0.$$

In diesem Falle hat die Gleichung $\psi(\alpha) = \psi(\alpha_0) + k$ eine einzige Wurzel, und es wird daher entweder von vornherein, oder wenigstens nach

Ablauf einer endlichen Zeit das Sphäroid anfangen, sich immer mehr und ohne Grenzen abzuplatten. Auch hier gilt die eben gemachte Bemerkung über die physische Möglichkeit der Bewegung.

§. 9.

Die soeben behandelten Fälle bieten die Eigenthümlichkeit dar, dafs in ihnen die Werthe der drei in §. 4. mit P', Q', R' bezeichneten Verbindungen während der ganzen Dauer der Bewegung verschwinden. Es erschien nun der Mühe werth zu untersuchen, ob aufser den genannten Fällen noch andere möglich sind, welche dieselbe Eigenschaft besitzen. Durch eine sorgfältige Analyse ergab sich, dafs noch zwei andere solche Bewegungen mit den Fundamentalgleichungen (a) in Uebereinstimmung gebracht werden können. Die erste derselben wird durch die Gleichungen

$$x = la, \quad y = m'b, \quad z = n''c; \quad lm'n'' = 1;$$

$$l\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{l^2}{A^2 l^2 + s}, \quad m'\frac{d^2 m'}{dt^2} = \frac{2\sigma}{B^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{m'^2}{B^2 m'^2 + s},$$

$$n''\frac{d^2 n''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{n''^2}{C^2 n''^2 + s}$$

ausgedrückt, in denen zur Abkürzung

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{A^2 l^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2 m'^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2 n''^2}\right)}$$

gesetzt ist *); allein hier reicht das von dem Prinzip der lebendigen Kraft herrührende Integral nicht aus, um das Problem auf Quadraturen zurückzuführen.

Der zweite Fall, welcher sich bei der Untersuchung auf eine eigenthümliche Weise von den übrigen absondert, giebt das schöne von *Jacobi* gefundene Resultat, dafs ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Axen A, B, C der Bedingung

$$\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)} = \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{C^2}}; \quad \Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2}\right)}$$

genügen, um die kleinste Axe C mit constanter Winkelgeschwindigkeit, deren Quadrat

*) Diese Gleichungen finden sich an verschiedenen Stellen, aber ohne weitere Discussion, in den von *Dirichlet* hinterlassenen Papieren.

$$k^2 = \frac{2\varepsilon\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\Delta\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)}$$

ist, rotiren kann, so dafs

$$x = a\cos kt + b\sin kt, \quad y = -a\sin kt + b\cos kt, \quad z = c$$

die Gleichungen der Bewegung sind.

Aus dieser Untersuchung ergiebt sich also auch das Resultat, dafs ein flüssiges homogenes Ellipsoid, dessen Elemente sich gegenseitig nach dem *Newton*schen Gesetze anziehen, nur dann wie ein fester Körper um seinen Schwerpunkt rotiren kann, wenn die Bewegung um eine feste, mit einer der Hauptaxen des Ellipsoides zusammenfallende Axe geschieht, was der von *Maclaurin* und *Jacobi* untersuchte Fall ist *); offenbar nämlich würden aufser den Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ noch die Bedingungen $P = 1$, $Q = 1$, $R = 1$ zu erfüllen sein, wodurch die übrigen, aufser den beiden soeben erwähnten, Fälle ausgeschlossen werden.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ besteht darin, dafs diejenigen Elemente der flüssigen Masse, welche anfänglich auf den drei Coordinatenaxen, also auf den Hauptaxen liegen, auch während der ganzen Bewegung drei zu einander senkrechte Gerade erfüllen; da nun andererseits aus der linearen Natur der Ausdrücke für x, y, z erhellt, dafs solche Theilchen der flüssigen Masse, welche ursprünglich in drei conjugirten Durchmessern liegen, dieselbe Eigenschaft stets beibehalten, so ist der eigentliche Sinn der erwähnten drei Gleichungen der, dafs die drei Hauptaxen des Ellipsoides stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet werden. Es lag nun nahe, eine verwandte Hypothese zu machen, die nämlich, dafs die Richtungen der drei Hauptaxen stets unverändert bleiben; bedient man sich der in §. 4. eingeführten Bezeichnungen, so wird diese Forderung durch die drei Gleichungen $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ ausgedrückt und sie ist offenbar sowohl in dem ersten der beiden in diesem §. erwähnten Fälle, als auch in demjenigen erfüllt, welcher vorher (in §. 6—8.) ausführlich behandelt ist; aufserdem ergab aber die Durchführung dieser Hypothese noch einen dritten Fall, welcher ein schönes Seitenstück zu dem soeben angeführten von *Jacobi* herrührenden Satze bildet und sich auf folgende Weise aussprechen läfst:

---

*) Diese Bemerkung ist fast wörtlich einem Briefe *Dirichlets* an Herrn *Kronecker* entnommen.

Ein jedes dreiaxige Ellipsoid, welches dem Satze von *Jacobi* genügt, kann auch seine äufsere Gestalt und *Lage* unverändert beibehalten, wenn eine innere Bewegung der Elemente Statt findet, die durch die Gleichungen

$$x = a\cos kt + b\frac{A}{B}\sin kt, \qquad y = -a\frac{B}{A}\sin kt + b\cos kt, \qquad z = c$$

ausgedrückt wird, in denen die Constante k die frühere Bedeutung hat; jedes Theilchen beschreibt eine Ellipse, deren Gleichungen

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2}; \qquad z = c$$

sind, und zwar in derselben Weise, wie wenn es isolirt wäre und gegen den Mittelpunkt seiner Bahn durch eine der Entfernung proportionale Kraft angezogen würde, deren Mafs für die Einheit der Entfernung $= k^2$ ist.

Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung.

(Von Herrn *Dedekind* zu Zürich.)

Bei dem gegenwärtigen neuen Abdruck der *Dirichlet*schen Abhandlung erschien es mir zweckmäfsig, zu den im §. 9 aufgestellten Sätzen die Rechnungen nachzuliefern, welche ich in die Abhandlung selbst nicht aufnehmen zu dürfen glaubte; es ist mir bei dieser erneuerten Beschäftigung mit dem Gegenstande gelungen, einen neuen allgemeinen Satz zu finden, welcher eine eigenthümliche Reciprocität zwischen je zwei zusammengehörigen Bewegungen eines und desselben flüssigen Ellipsoides ausspricht, und als speciellen Fall die Beziehung enthält, welche zwischen der Rotation eines *Jacobi*schen ungleichaxigen Ellipsoides und der von mir aufgefundenen Bewegung desselben Ellipsoides Statt findet.

§. 1.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Untersuchung desjenigen Falles, in welchem während der ganzen Dauer der Bewegung die Relationen

$$(1.)\quad \begin{cases} P' = mn + m'n' + m''n'' = 0, \\ Q' = nl + n'l' + n''l'' = 0, \\ R' = lm + l'm' + l''m'' = 0 \end{cases}$$

Statt finden, deren geometrische Bedeutung, wie im §. 9 der Abhandlung bemerkt ist, darin besteht, dafs die Hauptaxen des Ellipsoides stets von denselben Elementen der flüssigen Masse gebildet werden. Bezeichnet man, wie ich es in §. 4 der Abhandlung gethan habe, die Verbindungen

$$\begin{array}{ll} l^2 + l'^2 + l''^2 & \text{mit } P, \\ m^2 + m'^2 + m''^2 & \text{mit } Q, \\ n^2 + n'^2 + n''^2 & \text{mit } R, \end{array}$$

so ergiebt sich aus der Hypothese (1.) folgendes System von Relationen:

$$(2.)\quad \begin{cases} l = P\lambda, & l' = P\lambda', & l'' = P\lambda'', \\ m = Q\mu, & m' = Q\mu', & m'' = Q\mu'', \\ n = R\nu, & n' = R\nu', & n'' = R\nu''. \end{cases}$$

Es leuchtet ein, dafs die neun Gröfsen

$$\frac{l}{\sqrt{P}},\quad \frac{l'}{\sqrt{P}},\quad \frac{l''}{\sqrt{P}},$$
$$\frac{m}{\sqrt{Q}},\quad \frac{m'}{\sqrt{Q}},\quad \frac{m''}{\sqrt{Q}},$$
$$\frac{n}{\sqrt{R}},\quad \frac{n'}{\sqrt{R}},\quad \frac{n''}{\sqrt{R}}$$

die Coefficienten einer orthogonalen Coordinaten-Transformation bilden, und es ist

$$PQR = 1.$$

Setzt man daher

$$x'\sqrt{P} = lx + l'y + l''z,$$
$$y'\sqrt{Q} = mx + m'y + m''z,$$
$$z'\sqrt{R} = nx + n'y + n''z,$$

so sind x', y', z' die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Coordinaten in Bezug auf das ursprüngliche x, y, z sind. Da nun die mit der Zeit veränderlichen Coordinaten x, y, z eines flüssigen Elementes von den anfänglichen Coordinaten a, b, c desselben Elementes in folgender Weise abhängen:

$$x = la + mb + nc,$$
$$y = l'a + m'b + n'c,$$
$$z = l''a + m''b + n''c,$$

so sind

$$x' = a\sqrt{P},\quad y' = b\sqrt{Q},\quad z' = c\sqrt{R}$$

die Coordinaten desselben Elementes zur Zeit t in Bezug auf das neue mit der Zeit veränderliche System, und die Gleichung der Oberfläche des Ellipsoides wird

$$\frac{x'^2}{A^2P} + \frac{y'^2}{B^2Q} + \frac{z'^2}{C^2R} = 1,$$

woraus die oben angegebene geometrische Bedeutung unserer Hypothese (1.) unmittelbar hervorgeht. Aber es ergiebt sich auch der Werth des Potentiales im Elemente (x', y', z') oder (a, b, c) zur Zeit t:

$$V = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{x'^2}{A^2P+s} - \frac{y'^2}{B^2Q+s} - \frac{z'^2}{C^2R+s}\right)$$
$$= \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\left(1 - \frac{Pa^2}{A^2P+s} - \frac{Qb^2}{B^2Q+s} - \frac{Rc^2}{C^2R+s}\right),$$

also

$$L = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \cdot \frac{P}{A^2P+s}, \quad M = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \cdot \frac{Q}{B^2Q+s}, \quad N = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\Delta} \cdot \frac{R}{C^2R+s},$$

$$L' = 0, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0,$$

worin

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{A^2P}\right)\left(1+\frac{s}{B^2Q}\right)\left(1+\frac{s}{C^2R}\right)}$$

ist. Dieselben Werthe ergeben sich auch aus den Formeln des §. 4 der Abhandlung; doch schien es mir zweckmäfsig, dieselben für unsern Fall direct abzuleiten.

§. 2.

Nach diesen unmittelbaren Folgerungen aus der Hypothese gehen wir zu der Untersuchung über, wann dieselbe mit den Differentialgleichungen (a) im §. 1 der Abhandlung in Uebereinstimmung ist. Durch eine erste Differentiation erhalten wir in Verbindung mit den Integralgleichungen (I.) (in §. 5 der Abh.) folgende Gleichungen:

$$(3.) \quad \begin{cases} m\frac{dn}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} = \frac{1}{2}\mathfrak{A}; \quad n\frac{dm}{dt} + n'\frac{dm'}{dt} + n''\frac{dm''}{dt} = -\frac{1}{2}\mathfrak{A}; \\ n\frac{dl}{dt} + n'\frac{dl'}{dt} + n''\frac{dl''}{dt} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}; \quad l\frac{dn}{dt} + l'\frac{dn'}{dt} + l''\frac{dn''}{dt} = -\frac{1}{2}\mathfrak{B}; \\ l\frac{dm}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} + l''\frac{dm''}{dt} = \frac{1}{2}\mathfrak{C}; \quad m\frac{dl}{dt} + m'\frac{dl'}{dt} + m''\frac{dl''}{dt} = -\frac{1}{2}\mathfrak{C}; \end{cases}$$

also für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}\mathfrak{A}; \quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}\mathfrak{B}; \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = -\left(\frac{dl'}{dt}\right) = \frac{1}{2}\mathfrak{C}.$$

Da ferner

$$L' = M' = N' = 0$$

ist, so ergiebt die folgende Differentiation

$$(4.) \quad \begin{cases} \frac{dm}{dt}\frac{dn}{dt} + \frac{dm'}{dt}\frac{dn'}{dt} + \frac{dm''}{dt}\frac{dn''}{dt} = 0, \\ \frac{dn}{dt}\frac{dl}{dt} + \frac{dn'}{dt}\frac{dl'}{dt} + \frac{dn''}{dt}\frac{dl''}{dt} = 0, \\ \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt} + \frac{dl''}{dt}\frac{dm''}{dt} = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgen für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 2\mathfrak{A}\left\{\left(\frac{dm'}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dn''}{dt}\right)_0\right\}; \quad \mathfrak{C}\mathfrak{A} = 2\mathfrak{B}\left\{\left(\frac{dn''}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dl}{dt}\right)_0\right\}; \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 2\mathfrak{C}\left\{\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 - \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0\right\},$$

also auch

$$\mathfrak{B}^2\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}^2\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2 = 0,$$

d. h.

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0, \quad \mathfrak{C}\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0.$$

Es ist daher entweder

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \mathfrak{C} = 0,$$

oder z. B.

$$\mathfrak{A} = 0, \quad \mathfrak{B} = 0, \quad \left(\frac{dl}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dm'}{dt}\right)_0.$$

In beiden Fällen entnimmt man aus den Gleichungen (3.)

$$l\frac{dn}{dt} + l'\frac{dn'}{dt} + l''\frac{dn''}{dt} = 0,$$

$$m\frac{dn}{dt} + m'\frac{dn'}{dt} + m''\frac{dn''}{dt} = 0,$$

so dafs, mit Rücksicht auf die Gleichungen (2.)

$$dn : dn' : dn'' = \nu : \nu' : \nu'' = n : n' : n''$$

ist, woraus folgt, dafs die Verhältnisse $\frac{n}{n''}$, $\frac{n'}{n''}$ constant und folglich

$$(5.) \quad n = 0, \quad n' = 0$$

ist. Hieraus ergiebt sich sogleich in Verbindung mit $P' = 0$, $Q' = 0$, dafs auch

$$(6.) \quad m'' = 0, \quad l'' = 0$$

sein mufs. Die Forderungen der Hypothese (1.) und die daraus abgeleiteten Folgerungen (3.) und (4.) reduciren sich daher auf die Gleichungen

$$R' = lm + l'm' = 0; \quad l\frac{dm}{dt} + l'\frac{dm'}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \quad \frac{dl}{dt}\frac{dm}{dt} + \frac{dl'}{dt}\frac{dm'}{dt} = 0.$$

Man setze deshalb

$$l' = hl, \quad m = -hm',$$

worin h eine neue Function bezeichnet, deren Anfangswerth $= 0$ ist; durch Einführung dieser beiden Ausdrücke für l', m in die zuletzt aufgestellten Gleichungen erhält man

$$-lm'\frac{dh}{dt} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{C}; \quad \left(l\frac{dm'}{dt} - m'\frac{dl}{dt}\right)\frac{dh}{dt} = 0.$$

Es ist daher entweder

$$\frac{dh}{dt} = 0, \quad h = 0, \quad l' = 0, \quad m = 0, \quad \mathfrak{C} = 0,$$

$$x = la, \quad y = m'b, \quad z = n''c$$

oder, wenn $\mathfrak{C}$ von Null verschieden,

$$l\frac{dm'}{dt} = m'\frac{dl}{dt},\quad m' = l,\quad l' = -m,$$
$$x = la + mb,\quad y = -ma + lb,\quad z = n''c.$$

Der erste dieser beiden Fälle stimmt mit dem zu Anfang des §. 9 der Abhandlung angeführten überein; bezeichnet man die Axen Al, Bm', Cn'' mit α, β, γ, so hat man zur Bestimmung derselben und der Function σ die Gleichungen

$$\alpha\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+s};\quad \beta\frac{d^2\beta}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\beta^2}{\beta^2+s};$$
$$\gamma\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{\gamma^2}{\gamma^2+s};\quad \alpha\beta\gamma = \text{Const.}$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{s}{\beta^2}\right)\left(1+\frac{s}{\gamma^2}\right)}$$

ist.

Im zweiten Fall reduciren sich die Gleichungen (a) (§. 1 der Abh.) auf die folgenden fünf:

$$l\frac{d^2l}{dt^2} + m\frac{d^2m}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{A^2+n''s},$$
$$m\frac{d^2m}{dt^2} + l\frac{d^2l}{dt^2} = \frac{2\sigma}{B^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{1}{B^2+n''s},$$
$$n''\frac{d^2n''}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta}\cdot\frac{n''^2}{C^2n''^2+s},$$
$$l\frac{d^2m}{dt^2} - m\frac{d^2l}{dt^2} = 0,$$
$$(l^2+m^2)n'' = 1,$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{\left(1+\frac{n''s}{A^2}\right)\left(1+\frac{n''s}{B^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2n''^2}\right)}.$$

Wenn nun $A = B$ ist, so sind die beiden ersten dieser Gleichungen unter einander identisch, und man erhält den in §§. 6—8 der Abhandlung untersuchten Fall. Ist dagegen B von A verschieden, so ergiebt die genauere Untersuchung, wie sie sogleich angedeutet werden soll, dafs diesen fünf zur Bestimmung der vier Functionen l, m, n'', σ dienenden Gleichungen nur durch ein constantes

$$n'' = 1$$

Genüge geschieht. Es folgt dann

$$\sigma = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)} = \varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{1}{1+\frac{s}{C^2}},$$

$$l\frac{d^2l}{dt^2}+m\frac{d^2m}{dt^2} = -\frac{2\varepsilon\pi}{A^2B^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{s}{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)} = -k^2;$$

$$l\frac{d^2m}{dt^2}-m\frac{d^2l}{dt^2} = 0; \quad l^2+m^2 = 1,$$

worin

$$\Delta = \sqrt{\left(1+\frac{s}{A^2}\right)\left(1+\frac{s}{B^2}\right)\left(1+\frac{s}{C^2}\right)}.$$

Damit die drei letzten Gleichungen mit einander harmoniren, ist erforderlich, dafs

$$\frac{d^2l}{dt^2} = -k^2l, \quad \frac{d^2m}{dt^2} = -k^2m,$$

$$l = \cos kt + \left(\frac{dl}{dt}\right)_0\frac{\sin kt}{k}, \quad m = \left(\frac{dm}{dt}\right)_0\frac{\sin kt}{k}$$

ist; aus $l^2+m^2=1$, folgt endlich

$$\left(\frac{dl}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = k,$$

$$l = \cos kt, \quad m = \sin kt,$$

worin k zweideutig ist. Dies ist der Satz von *Jacobi*.

Dafs wirklich in diesem Falle n'' constant sein mufs, ergiebt sich auf folgendem Wege, dessen nähere Ausführung hier aber zu viel Raum einnehmen würde. Die beiden ersten der fünf Gleichungen geben σ und $l\frac{d^2l}{dt^2}+m\frac{d^2m}{dt^2}$ ausgedrückt durch n''; verbindet man hiermit die beiden letzten Gleichungen und verfährt wie in §. 6 der Abhandlung, so kann man l und m vollständig eliminiren, und man erhält folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{2n''^2}\frac{d^2n''}{dt^2}-\frac{3}{4n''^3}\left(\frac{dn''}{dt}\right)^2+\omega_0^2n'' = 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{n''s}{(A^2+n''s)(B^2+n''s)},$$

welche nun noch mit der dritten jener fünf Gleichungen

$$n''\frac{d^2n''}{dt^2} = \frac{2\varepsilon\pi}{C^2}\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{A^2}{A^2+n''s}\cdot\frac{B^2}{B^2+n''s} - 2\varepsilon\pi\int_0^\infty \frac{ds}{\Delta}\cdot\frac{n''^2}{C^2n''^2+s}$$

harmoniren mufs. Allein aus der Combination dieser beiden Gleichungen leitet man eine von $\frac{dn''}{dt}$, $\frac{d^2n''}{dt^2}$ befreite Gleichung ab, von welcher man nachweisen

kann, dafs sie für kein noch so kleines an $n''=1$ angrenzendes Intervall von Werthen eine Identität in Bezug auf n'' sein kann, wie auch die Integrationsconstanten und die Axen A, B, C beschaffen sein mögen. Woraus folgt, dafs n'' constant sein mufs.

§. 3.

Statt nun die zweite Hypothese, welche darin besteht, dafs während der ganzen Dauer der Bewegung die Relationen

$$T = \frac{\lambda'\lambda''}{A^2} + \frac{\mu'\mu''}{B^2} + \frac{\nu'\nu''}{C^2} = 0,$$

$$T' = \frac{\lambda''\lambda}{A^2} + \frac{\mu''\mu}{B^2} + \frac{\nu''\nu}{C^2} = 0,$$

$$T'' = \frac{\lambda\lambda'}{A^2} + \frac{\mu\mu'}{B^2} + \frac{\nu\nu'}{C^2} = 0$$

Statt finden, in ähnlicher Weise zu behandeln, wie die soeben untersuchte, ziehe ich es vor, einen allgemeinen Satz zu beweisen, vermöge dessen diese Discussion sogleich auf die vorhergehende zurückgeführt werden kann. Freilich ist die Umformung der Differentialgleichungen (a) (§. 1 der Abh.), welche zu diesem Resultat führt, etwas umständlich, allein es ist mir bis jetzt nicht geglückt, dasselbe auf einem kürzeren Wege zu erreichen.

Durch die zu Anfang des §. 2 der Abhandlung angedeutete Auflösung der neun Differentialgleichungen erhält man z. B.

$$(7.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2l}{dt^2} = \dfrac{2\sigma}{A^2}\lambda - 2\varepsilon(L\lambda + N'\mu + M'\nu), \\ \dfrac{d^2m}{dt^2} = \dfrac{2\sigma}{B^2}\mu - 2\varepsilon(N'\lambda + M\mu + L'\nu), \\ \dfrac{d^2n}{dt^2} = \dfrac{2\sigma}{C^2}\nu - 2\varepsilon(M'\lambda + L'\mu + N\nu), \end{cases}$$

und hieraus ergeben sich die sechs andern zweiten Derivirten durch gleichzeitige Accentuation der Buchstaben l, m, n, λ, μ, ν. Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$K = \pi\int_0^\infty \frac{ds}{\varDelta} + \left(\frac{QR-P'^2}{A^2} + \frac{RP-Q'^2}{B^2} + \frac{PQ-R'^2}{C^2}\right)\pi\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta^3},$$

$$K' = \pi\int_0^\infty \frac{s\,ds}{\varDelta^3};\quad K'' = \pi\int_0^\infty \frac{s^2ds}{\varDelta^3},$$

so ist zufolge §. 4 der Abhandlung:

$$L = \frac{K}{A^2} - \frac{QR - P'^2}{A^4} K' + \frac{P}{A^2B^2C^2} K'',$$

$$M = \frac{K}{B^2} - \frac{RP - Q'^2}{B^4} K' + \frac{Q}{A^2B^2C^2} K'',$$

$$N = \frac{K}{C^2} - \frac{PQ - R'^2}{C^4} K' + \frac{R}{A^2B^2C^2} K'',$$

$$L' = -\frac{Q'R' - P'P}{B^2C^2} K' + \frac{P'}{A^2B^2C^2} K'',$$

$$M' = -\frac{R'P' - Q'Q}{C^2A^2} K' + \frac{Q'}{A^2B^2C^2} K'',$$

$$N' = -\frac{P'Q' - R'R}{A^2B^2} K' + \frac{R'}{A^2B^2C^2} K''.$$

Hieraus findet man

$$L\lambda + N'\mu + M'\nu = \frac{K}{A^2}\lambda - \frac{K'}{A^2}(S\lambda + T''\lambda' + T'\lambda'') + \frac{K''}{A^2}\frac{l}{B^2C^2},$$

$$N'\lambda + M\mu + L'\nu = \frac{K}{B^2}\mu - \frac{K'}{B^2}(S\mu + T''\mu' + T'\mu'') + \frac{K''}{B^2}\frac{m}{C^2A^2},$$

$$M'\lambda + L'\mu + N\nu = \frac{K}{C^2}\nu - \frac{K'}{C^2}(S\nu + T''\nu' + T'\nu'') + \frac{K''}{C^2}\frac{n}{A^2B^2}.$$

Multiplicirt man daher die Gleichungen (7.) der Reihe nach einmal mit $A^2 l$, $B^2 m$, $C^2 n$; dann mit $A^2 l'$, $B^2 m'$, $C^2 n'$; endlich mit $A^2 l''$, $B^2 m''$, $C^2 n''$ und addirt jedesmal, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} A^2 l\,\dfrac{d^2 l}{dt^2} + B^2 m\,\dfrac{d^2 m}{dt^2} + C^2 n\,\dfrac{d^2 n}{dt^2} = 2\sigma - 2\varepsilon\{K - SK' + (S'S'' - T^2)K''\}, \\ A^2 l'\dfrac{d^2 l}{dt^2} + B^2 m'\dfrac{d^2 m}{dt^2} + C^2 n'\dfrac{d^2 n}{dt^2} = \quad -2\varepsilon\{-T''K' + (TT' - T''S'')K''\}, \\ A^2 l''\dfrac{d^2 l}{dt^2} + B^2 m''\dfrac{d^2 m}{dt^2} + C^2 n''\dfrac{d^2 n}{dt^2} = \quad -2\varepsilon\{-T'K' + (T''T - T'S')K''\}. \end{cases}$$

Es wird nicht nöthig sein, die sechs anderen Gleichungen, welche man durch Accentuation (die jedoch nicht auf K, K', K'' auszudehnen ist) aus diesen erhält, ebenfalls hieher zu setzen; doch bemerke ich, dafs aus den drei Paaren dieser Gleichungen, auf deren rechter Seite σ fehlt, sogleich die drei Integralgleichungen (II.) (§. 5 der Abh.) folgen, welche von dem Princip der Flächen herrühren. Die Gleichungen (8.) führen nun zum Beweise eines neuen Satzes über das *Dirichlet*sche Problem. Zu dem Zweck führe ich folgende neun Functionen der Zeit ein:

$$l_1 = l; \quad m_1 = \frac{A}{B} l'; \quad n_1 = \frac{A}{C} l'';$$
$$l'_1 = \frac{B}{A} m; \quad m'_1 = m'; \quad n'_1 = \frac{B}{C} m'';$$
$$l''_1 = \frac{C}{A} n; \quad m''_1 = \frac{C}{B} n'; \quad n''_1 = n'';$$

und übertrage jede früher zur Abkürzung eingeführte Bezeichnung durch Anhängung des Index 1 auf die Verbindungen, welche in derselben Weise von diesen neuen Functionen abhängen, so dafs z. B.

$$P_1 = l_1^2 + l_1'^2 + l_1''^2$$

ist. Dann ergiebt sich

$$P_1 = B^2C^2(S'S'' - T^2); \quad P'_1 = A^2BC(T'T'' - TS),$$
$$Q_1 = C^2A^2(S''S - T'^2); \quad Q'_1 = B^2CA(T''T - T'S');$$
$$R_1 = A^2B^2(SS' - T''^2); \quad R'_1 = C^2AB(TT' - T''S'');$$

ferner

$$Q_1R_1 - P_1'^2 = A^2S; \quad Q'_1R'_1 - P'_1P_1 = BCT;$$
$$R_1P_1 - Q_1'^2 = B^2S'; \quad R'_1P'_1 - Q'_1Q_1 = CAT';$$
$$P_1Q_1 - R_1'^2 = C^2S''; \quad P'_1Q'_1 - R'_1R_1 = ABT''.$$

Da ferner umgekehrt

$$l = l_1; \quad m = \frac{A}{B} l'_1; \quad n = \frac{A}{C} l''_1;$$
$$l' = \frac{B}{A} m_1; \quad m' = m'_1; \quad n' = \frac{B}{C} m''_1;$$
$$l'' = \frac{C}{A} n_1; \quad m'' = \frac{C}{B} n'_1; \quad n'' = n''_1$$

ist, so folgt unmittelbar, dafs auch

$$P = B^2C^2(S'_1S''_1 - T_1^2); \quad P' = A^2BC(T'_1T''_1 - T_1S_1);$$
etc.

und

$$QR - P'^2 = A^2S_1; \quad Q'R' - P'P = BCT_1;$$
etc.

ist. Nun war früher

$$\frac{P}{B^2C^2} + \frac{Q}{C^2A^2} + \frac{R}{A^2B^2} = S'S'' - T^2 + S''S - T'^2 + SS' - T''^2;$$

zufolge der vorstehenden Relationen ist dieser Ausdruck aber auch gleich dem folgenden:

$$S'_1S''_1 - T_1^2 + S''_1S_1 - T'^2_1 + S_1S'_1 - T''^2_1 = \frac{P_1}{B^2C^2} + \frac{Q_1}{C^2A^2} + \frac{R_1}{A^2B^2},$$

und ebenso ergiebt sich

$$\frac{QR-P'^2}{A^2} + \frac{RP-Q'^2}{B^2} + \frac{PQ-R'^2}{C^2} = S + S' + S'' =$$

$$\frac{Q_1R_1-P'^2_1}{A^2} + \frac{R_1P_1-Q'^2_1}{B^2} + \frac{P_1Q_1-R'^2_1}{C^2} = S_1 + S'_1 + S''_1,$$

folglich

$$\Delta_1 = \Delta,$$

$$K_1 = K, \quad K'_1 = K', \quad K''_1 = K''$$

und daher

$$L_1 = \frac{K_1}{A^2} - \frac{Q_1R_1-P'^2_1}{A^4}K'_1 + \frac{P_1}{A^2B^2C^2}K''_1$$

$$= \frac{K}{A^2} - \frac{S}{A^2}K' + \frac{S'S''-T^2}{A^2}K''$$

etc.

$$L'_1 = -\frac{Q'_1R'_1-P'_1P_1}{B^2C^2}K'_1 + \frac{P'_1}{A^2B^2C^2}K''_1$$

$$= -\frac{T}{BC}K' + \frac{T'T''-TS}{BC}K''$$

etc.

Hieraus folgt nun endlich, dafs die Gleichungen (8.) sich folgendermafsen schreiben lassen:

$$l_1\frac{d^2l_1}{dt^2} + l'_1\frac{d^2l'_1}{dt^2} + l''_1\frac{d^2l''_1}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\varepsilon L_1,$$

$$m_1\frac{d^2l_1}{dt^2} + m'_1\frac{d^2l'_1}{dt^2} + m''_1\frac{d^2l''_1}{dt^2} = \qquad -2\varepsilon N'_1,$$

$$n_1\frac{d^2l_1}{dt^2} + n'_1\frac{d^2l'_1}{dt^2} + n''_1\frac{d^2l''_1}{dt^2} = \qquad -2\varepsilon M'_1.$$

etc.

Da nun aufserdem

$$\Sigma \pm l_1m'_1n''_1 = \Sigma \pm lm'n'' = 1,$$

so ergiebt sich durch Vergleichung mit den Gleichungen (a) (§. 1 der Abh.) folgendes Theorem:

Einer jeden durch die Gleichungen

$$x = la + mb + nc,$$
$$y = l'a + m'b + n'c,$$
$$z = l''a + m''b + n''c$$

ausgedrückten Bewegung eines flüssigen Ellipsoides, dessen anfängliche Oberfläche die Gleichung

$$\frac{a^2}{A^2}+\frac{b^2}{B^2}+\frac{c^2}{C^2}=1$$

hat, entspricht durch Abänderung des anfänglichen Bewegungszustandes eine zweite durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1 &= \quad la+\frac{A}{B}l'b+\frac{A}{C}l''c,\\
y_1 &= \frac{B}{A}ma+\quad m'b+\frac{B}{C}m''c,\\
z_1 &= \frac{C}{A}na+\frac{C}{B}n'b+\quad n''c
\end{aligned}$$

ausgedrückte Bewegung desselben Ellipsoides.

Ueber diesen Satz mögen hier nur folgende allgemeine Bemerkungen noch Platz finden. Die zweite Bewegung unterscheidet sich von der ersten dadurch, dafs an die Stelle von

$$\left(\frac{dm}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{dn}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{dl'}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{dn'}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{dl''}{dt}\right)_0,\quad \left(\frac{dm''}{dt}\right)_0$$

die Gröfsen

$$\frac{A}{B}\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0,\quad \frac{A}{C}\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0,\quad \frac{B}{A}\left(\frac{dm}{dt}\right)_0,\quad \frac{B}{C}\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0,\quad \frac{C}{A}\left(\frac{dn}{dt}\right)_0,\quad \frac{C}{B}\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0$$

treten. Die beiden anfänglich coincidirenden Ellipsoide sind auch zu jeder späteren Zeit einander congruent, da $\varDelta_1=\varDelta$ ist. Je zwei anfänglich zusammenfallende Theilchen erleiden in beiden Bewegungen zu derselben Zeit auch denselben Druck, da für beide Bewegungen σ dieselbe Bedeutung hat; dies läfst sich auch leicht durch die im §. 4 der Abhandlung zur Bestimmung von σ gegebene Formel verificiren, da die Gröfsen

$$\frac{QR-P'^2}{A^2}+\frac{RP-Q'^2}{B^2}+\frac{PQ-R'^2}{C^2}\quad\text{und}\quad \Sigma\frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}$$

beim Uebergange von der einen Bewegung zur anderen ungeändert bleiben.

Es verdient ferner bemerkt zu werden, dafs in Folge der Willkürlichkeit der Vorzeichen der Axen A, B, C jedesmal vier solche correspondirende Bewegungen existiren, welche unter einander in derselben Beziehung stehen, wie die vier durch die Coefficientensysteme

$$\begin{matrix} l, & m, & n, \\ l', & m', & n', \\ l'', & m'', & n'', \end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} l, & -m, & -n, \\ -l', & m', & n', \\ -l'', & m'', & n'', \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} l, & -m, & n, \\ -l', & m', & -n', \\ l'', & -m'', & n'', \end{matrix}\qquad\qquad \begin{matrix} l, & m, & -n, \\ l', & m', & -n', \\ -l'', & -m'', & n'' \end{matrix}$$

charakterisirten Bewegungen, welche durch Vertauschung der positiven Coordinatenrichtungen mit den negativen aus einander entspringen.

Endlich leuchtet ein, dafs bei dem Uebergange von der einen zu der anderen Bewegung die Integralgleichungen (I.) und (II.) sich mit einander vertauschen, während das aus dem Princip der lebendigen Kraft herrührende Integral (III.) ungeändert bleibt (§. 5 der Abh.).

Wenn ferner für den Anfangszustand der Bewegung die Relationen

$$B\left(\frac{dm}{dt}\right)_0 = A\left(\frac{dl'}{dt}\right)_0, \quad C\left(\frac{dn}{dt}\right)_0 = A\left(\frac{dl''}{dt}\right)_0, \quad B\left(\frac{dm''}{dt}\right)_0 = C\left(\frac{dn'}{dt}\right)_0$$

gelten, so ist auch für die ganze Dauer der Bewegung

$$Bm = Al', \quad Cn = Al'', \quad Bm'' = Cn'$$

und die beiden Bewegungen sind identisch. In diesem Fall reduciren sich die neun Differentialgleichungen (a.) auf nur sechs wesentlich verschiedene, und die Bewegung hängt nur noch von fünf willkürlichen Constanten ab.

§. 4.

Ist nun während der ganzen Dauer der Bewegung $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$, so ist in der correspondirenden Bewegung beständig

$$P_1' = 0, \quad Q_1' = 0, \quad R_1' = 0$$

und umgekehrt. Die Gleichungen der letzteren haben daher zufolge unserer ersten Untersuchung entweder die Form

$$x_1 = l_1 a, \quad y_1 = m_1' b, \quad z_1 = n_1'' c$$

oder

$$x_1 = l_1 a + m_1 b, \quad y_1 = -m_1 a + l_1 b, \quad z_1 = n_1'' c; \quad B = A,$$

in welchen beiden Fällen die ursprüngliche Bewegung dieselben Gleichungen hat; oder endlich die correspondirende Bewegung besteht in der gleichförmigen Rotation

$$x_1 = a\cos kt + b\sin kt, \quad y_1 = -a\sin kt + b\cos kt, \quad z_1 = c$$

eines *Jacobi*schen ungleichaxigen Ellipsoides. Dann ist die ursprüngliche Bewegung durch die Gleichungen

$$x = a\cos kt - b\frac{A}{B}\sin kt, \quad y = a\frac{B}{A}\sin kt + b\cos kt, \quad z = c$$

ausgedrückt, und hierin besteht der am Schlufs der *Dirichlet*schen Abhandlung von mir mitgetheilte Satz.

Zürich, den 6ten August 1860.



Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

---

§. 1.

Es sei v eine homogene Function vierter Ordnung von zwei Veränderlichen, $\varDelta(v)$ ihre Determinante dividirt durch 144, H die aus den ersten Differentialquotienten beider Functionen zusammengesetzte Determinante. Aus den Untersuchungen von ***Hesse*** (dieses Journal Bd. 41), ***Cayley, Hermite*** (dieses Journal Bd. 52, p. 1ff.), ***Brioschi*** (dieses Journal Bd. 53, p. 377) geht hervor, dafs die Zerlegung der Function vierter Ordnung

$$\alpha v+\beta\varDelta(v),$$

und die Zerlegung der Function sechster Ordnung H in lineare Factoren nur von der Auflösung einer einzigen cubischen Gleichung abhängig sein können, welche Werthe in der ersten Form auch die Coefficienten α, β haben mögen. Ist

$$v = ax^4+4byx^3+6cy^2x^2+4dy^3x+ey^4,$$

und sind i, j die beiden Invarianten dieser Function:

$$i = ae-4bd+3c^2,$$
$$j = ace+2bdc-ad^2-eb^2-c^3,$$

so erhält man diese cubische Gleichung, indem man die Function

$$\Theta = 4\alpha^3-i\alpha\beta^2-j\beta^3$$

gleich Null setzt; eine Function, welche in der Theorie dieser Formen unter anderem dadurch eine hervorragende Rolle spielt, dafs die beiden Invarianten $i_{\alpha\beta}$, $j_{\alpha\beta}$ der zusammengesetzten Function $\alpha v+\beta\varDelta(v)$ sich in der Form darstellen:

$$i_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{48}\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\Theta}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\alpha\partial\beta}\right)^2\right),$$
$$j_{\alpha\beta} = -\tfrac{1}{36}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}\frac{\partial i_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\frac{\partial i_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right),$$

während die Function $\varDelta$, gebildet für die zusammengesetzte Function $\alpha v+\beta\varDelta(v)$, die Gestalt annimmt:

$$\varDelta(\alpha v+\beta\varDelta(v)) = \tfrac{1}{12}\left(\varDelta(v)\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha}-v\frac{\partial\Theta}{\partial\beta}\right)^{*}).$$

---

*) Man erkennt die Richtigkeit dieser Bildungen leicht aus der angeführten Abhandlung des Herrn ***Hermite***.

In der That findet man, wenn

$$\varDelta(v) = a'x^4 + 4b'x^3y + 6c'x^2y^2 + 4d'xy^3 + e'y^4$$

gesetzt wird, *dafs die Wurzeln der biquadratischen Gleichung*

$$\alpha v + \beta \varDelta(v) = 0$$

folgende sind:

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\alpha a + \beta a'}\left\{-(\alpha b + \beta b') + \tfrac{1}{2}\sqrt{\Theta}.\sum_{i=1}^{i=3}\sqrt{\frac{\varkappa_i a + \lambda_i a'}{\varkappa_i \beta - \lambda_i \alpha}}\right\},$$

wo $\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}$, $\frac{\varkappa_2}{\lambda_2}$, $\frac{\varkappa_3}{\lambda_3}$ *die Wurzeln der cubischen Gleichung*

$$4\varkappa^3 - i\varkappa\lambda^2 - j\lambda^3 = 0$$

sind, und wo die Zeichen der Quadratwurzeln so zu bestimmen sind, dafs

$$\sqrt{\Theta}.\sqrt{\frac{\varkappa_1 a + \lambda_1 a'}{\varkappa_1 \beta - \lambda_1 \alpha}}.\sqrt{\frac{\varkappa_2 a + \lambda_2 a'}{\varkappa_2 \beta - \lambda_2 \alpha}}.\sqrt{\frac{\varkappa_3 a + \lambda_3 a'}{\varkappa_3 \beta - \lambda_3 \alpha}} = 2(ba' - ab').$$

Diese Formeln werden unbestimmt, sobald das Verhältnifs $\frac{\alpha}{\beta}$ mit einem der Verhältnisse $\frac{\varkappa_1}{\lambda_1}$, $\frac{\varkappa_2}{\lambda_2}$, $\frac{\varkappa_3}{\lambda_3}$ zusammenfällt. Aber aus den Untersuchungen, welche Herr *Brioschi* a. a. O. angestellt hat, folgt, dafs alsdann die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha v + \beta \varDelta(v) = 0$$

zugleich Wurzeln der auflösbaren Gleichung sechsten Grades

$$H = 0$$

werden; denn Herr *Brioschi* weist nach, dafs $H^2 = 0$ das Resultat der Elimination von α und β zwischen den Gleichungen

$$\alpha v + \beta \varDelta(v) = 0,$$
$$4\alpha^3 - i\alpha\beta^2 - j\beta^3 = 0$$

ist. *Wenn man also den obigen Ausdruck für den Grenzfall bestimmt, in welchem* $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varkappa}{\lambda}$ *wird, so erhält man die sechs Wurzeln der Gleichung* $H = 0$, jene Wurzeln, deren Eigenschaften Herr *Hesse* discutirt hat, ohne die Gleichung sechsten Grades selber zu bilden.

Wenn man aber in dem obigen Werth von $\frac{x}{y}$ diesen Grenzfall eintreten läfst, so wird $\Theta = 0$; mithin bleibt von den Gliedern der Summe nur dasjenige stehen, dessen Nenner ebenfalls verschwindet; und zwar ist dann in der Grenze

$$\frac{\Theta}{\varkappa\beta - \lambda\alpha} = \frac{i\lambda^2 - 12\varkappa^2}{\lambda}.$$

Die Wurzeln der Gleichung $H=0$ sind also:

$$\frac{x}{y} = -\frac{\varkappa b+\lambda b'}{\varkappa a+\lambda a'} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{i\lambda^2-12\varkappa^2}{\lambda(\varkappa a+\lambda a')}},$$

wo $\frac{\varkappa}{\lambda}$ ***eine Wurzel der cubischen Gleichung bedeutet:***

$$4\varkappa^3 - i\varkappa\lambda^2 - j\lambda^3 = 0.$$

§. 2.

Die drei homogenen Functionen vierter Ordnung mit zwei Veränderlichen a, b, welche in der Theorie der Curven dritter Ordnung eine so wichtige Rolle spielen:

$$G = a^4 - 6Sa^2b^2 - 8Tab^3 - 3S^2b^4,$$

$$S_{ab} = -\tfrac{1}{144}\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial a^2}\cdot\frac{\partial^2 G}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial a\partial b}\right)^2\right\},$$

$$T_{ab} = \tfrac{1}{16}\left\{\frac{\partial G}{\partial a}\cdot\frac{\partial S_{ab}}{db} - \frac{\partial G}{\partial b}\cdot\frac{\partial S_{ab}}{\partial a}\right\}$$

stehen, bis auf constante Factoren, zu einander genau in demselben Verhältnifs, wie oben die Functionen v, $\varDelta(v)$, H; denn es ist

$$S_{ab} = -\varDelta(G), \qquad T_{ab} = \tfrac{1}{16}H(G).$$

Man findet daher aus dem Obigen sofort die Auflösungen der Gleichungen

$$\alpha G - \beta S_{ab} = 0, \quad T_{ab} = 0;$$

wobei sich also der Satz ergiebt, ***dafs die Gleichung $T_{ab}=0$ immer algebraisch lösbar ist, und zwar durch dieselbe cubische Gleichung, durch welche die Gleichung $\alpha G-\beta S_{ab}=0$ gelöst wird, in welcher α, β beliebige Zahlen bedeuten.***

Von den beiden Invarianten i, j verschwindet für diesen Fall die erste, und j geht in die Form über:

$$j = 4S^3 - 4T^2 = -4R.$$

Die cubische Gleichung für $\varkappa$, λ ist also

$$\varkappa^3 + R\lambda^3 = 0,$$

und es wird, wenn man $\lambda=1$ setzt, und durch ε eine imaginäre dritte Wurzel der Einheit bezeichnet:

$$\varkappa_i = -\varepsilon^i . \sqrt[3]{R}.$$

Nimmt man hiezu den ausgerechneten Werth von S_{ab}:

$$S_{ab} = -\varDelta(G) = Sa^4 + 4T \;\ldots\; TSab^3 + (4T^2 - 3S^3)b^4$$



(vgl. *Aronhold,* dieses Journal Bd. 55, pag. 176), *so erhält man für die Wurzeln der Gleichung*

$$\alpha G - \beta S = 0:$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\alpha - \beta S}\left\{T\beta + \sqrt{\alpha^3+\beta^3 R}.\sum_{i=1}^{i=3}\sqrt{\frac{S+\varepsilon^i\sqrt[3]{R}}{\alpha+\beta\varepsilon^i\sqrt[3]{R}}}\right\},$$

wo die Zeichen so zu wählen sind, dafs

$$\sqrt{\alpha^3+\beta^3 R}.\sqrt{\frac{S+\sqrt[3]{R}}{\alpha+\beta\sqrt[3]{R}}}.\sqrt{\frac{S+\varepsilon\sqrt[3]{R}}{\alpha+\beta\varepsilon\sqrt[3]{R}}}.\sqrt{\frac{S+\varepsilon^2\sqrt[3]{R}}{\alpha+\beta\varepsilon^2\sqrt[3]{R}}} = T.$$

Insbesondere erhält man für $\alpha = 0$ *als Wurzeln von* $S_{ab} = 0$:

$$\frac{a}{b} = -\frac{1}{S}\left\{T+\sqrt{R}.\sum_{i=1}^{i=3}\sqrt{1+\frac{S}{\varepsilon^i\sqrt[3]{R}}}\right\},$$

mit der Zeichenbedingung:

$$\sqrt{R}.\sqrt{1+\frac{S}{\sqrt[3]{R}}}.\sqrt{1+\frac{S}{\varepsilon\sqrt[3]{R}}}.\sqrt{1+\frac{S}{\varepsilon^2\sqrt[3]{R}}} = T;$$

und für $\beta = 0$, *als Wurzeln von* $G = 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{S}\left\{\sqrt{S+\sqrt[3]{R}}+\sqrt{S+\varepsilon\sqrt[3]{R}}+\sqrt{S+\varepsilon^2\sqrt[3]{R}}\right\},$$

mit der Bedingung

$$\sqrt{S+\sqrt[3]{R}}.\sqrt{S+\varepsilon\sqrt[3]{R}}.\sqrt{S+\varepsilon^2\sqrt[3]{R}} = T.$$

Diese Wurzeln von $G = 0$ hat bereits Herr *Aronhold* (dieses Journal Bd. 39, pag. 157) angegeben.

Endlich sind *die Wurzeln von* $T_{ab} = 0$:

$$\frac{a}{b} = -\frac{T}{S+\varepsilon^i\sqrt[3]{R}} \pm \frac{\varepsilon^i\sqrt{3}.\sqrt[3]{R}}{\sqrt{S+\varepsilon^i\sqrt[3]{R}}}.$$

§. 3.

Um die geometrische Bedeutung der vorliegenden Gleichungen darzustellen, mufs ich den folgenden Satz voranschicken:

Die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung $u = 0$ *berühren zugleich die Curve* $\Delta(u) = 0$, wo $\Delta(u)$ die *Hesse*sche Determinante von u ist.

Dieser Satz ist leicht direct, z. B. mit Anwendung der *Hesse*schen Form, zu beweisen. Er folgt aber unmittelbar aus einer Betrachtung von weitergehendem Interesse, nämlich aus der Aufstellung des Ausdruckes neunter

Ordnung, welcher, in lineare Factoren auflösbar, das Product der Gleichungen der neun Wendepunktstangenten darstellt. Dafs ein solcher Ausdruck, mit rationalen Coefficienten, existirt, ist von vorn herein klar; die Darstellung desselben kann etwa in folgender Weise unternommen werden.

Es seien x_1, x_2, x_3 die Coordinaten eines Wendepunkts, y_1, y_2, y_3 die eines Punkts auf der Tangente desselben. Es kommt darauf an, die Gleichung zu finden, welcher dann die y genügen müssen. Da nun irgend ein Punkt auf der Verbindungslinie von x und y die Coordinaten $x+\lambda y$ hat, so kann man die Schnittpunkte dieser Linie mit $u=0$ erhalten, wenn man in u die Coordinaten $x+\lambda y$ einführt, und den entstehenden Ausdruck

$$u+\lambda Du+\frac{\lambda^2}{1.2}D^2u+\frac{\lambda^3}{1.2.3}D^3u$$

verschwinden läfst; was denn eine cubische Gleichung für λ giebt. Aber in dem besondern Fall, welcher vorliegt, müssen alle Schnittpunkte in x fallen; die Wurzeln der cubischen Gleichung müssen sämmtlich Null sein. Demnach hat man aufser

$$(1.)\quad \begin{cases} u = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh}x_ix_kx_h = 0 \quad \text{noch die Gleichungen} \\ Du = 3\Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh}x_ix_ky_h = 0, \\ D^2u = 6\Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh}x_iy_ky_h = 0. \end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen sind nun die x zu eliminiren. Zu diesem Ende setze ich zunächst

$$v = \Sigma\Sigma\Sigma a_{ikh}y_iy_ky_h,$$

so dafs $v=0$ wieder die Curvengleichung darstellt. Ferner sei:

$$v_i = \frac{\partial v}{\partial y_i} = 3\Sigma\Sigma a_{ikh}y_ky_h,$$

$$v_{ik} = \frac{\partial^2 v}{\partial y_i\partial y_k} = 6\Sigma a_{ikh}y_h.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke gehen nun die Gleichungen (1.) über in:

$$u=0,$$

$$Du = v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3 = 0,$$

$$D^2u = v_{11}x_1^2+2v_{12}x_1x_2+\cdots = 0.$$

Um hier die x zu eliminiren, kann man dasselbe Verfahren anwenden, dessen ich mich in einem früheren Aufsatze (dieses Journal Bd. 58, p. 96) bedient habe. Man kann immer einen Factor λ so bestimmen, dafs

$$(1^a.)\quad Du+\lambda(D^2u)^2 = (p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)(q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3) = pq$$



wird. Wenn man dies ausgeführt denkt, so kann man die x dann entweder aus den Gleichungen

$$p = 0, \quad D^2 u = 0$$

oder aus den Gleichungen

$$q = 0, \quad D^2 u = 0$$

auf lineare Weise bestimmen, so dafs entweder

$$\begin{aligned} x_1 &= p_2 v_3 - p_3 v_2 \\ x_2 &= p_3 v_1 - p_1 v_3 \\ x_3 &= p_1 v_2 - p_2 v_1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x_1 &= q_2 v_3 - q_3 v_2, \\ x_2 &= q_3 v_1 - q_1 v_3, \\ x_3 &= q_1 v_2 - q_2 v_1 \end{aligned}$$

gesetzt wird. Führt man diese Werthe in u ein, so ist das Product der entstehenden Ausdrücke die gesuchte Eliminationsgleichung.

Um diese Gleichung in passender Form auszudrücken, wende ich die symbolische Substitution

$$a_{ikh} = a_i a_k a_h = b_i b_k b_h$$

an, so dafs u die symbolische Gestalt annimmt:

$$u = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^3 = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^3.$$

Führt man hier die obigen Werthe der x ein, so erhält man entweder

$$(\Sigma \pm a_1 p_2 v_3)^3 = (\Sigma \pm b_1 p_2 v_3)^3$$

oder

$$(\Sigma \pm a_1 q_2 v_3)^3 = (\Sigma \pm b_1 q_2 v_3)^3.$$

Die Gleichung $u = 0$ ist daher ersetzbar durch folgende:

$$(2.) \quad \begin{cases} 0 = (\Sigma \pm a_1 p_2 v_3)^3 (\Sigma \pm b_1 q_2 v_3)^3 + (\Sigma \pm a_1 q_2 v_3)^3 (\Sigma \pm b_1 p_2 v_3)^3 \\ \quad = [(\Sigma \pm a_1 p_2 v_3)(\Sigma \pm b_1 q_2 v_3) + (\Sigma \pm a_1 q_2 v_3)(\Sigma \pm b_1 p_2 v_3)]^3 \\ \qquad - 3(\Sigma \pm a_1 p_2 v_3)(\Sigma \pm a_1 q_2 v_3)(\Sigma \pm b_1 p_2 v_3)(\Sigma \pm b_1 q_2 v_3) \\ \qquad \times [(\Sigma \pm a_1 p_2 v_3)(\Sigma \pm b_1 q_2 v_3) + (\Sigma \pm a_1 q_2 v_3)(\Sigma \pm b_1 p_2 v_3)] \\ \quad = 8C^3 - 6A.B.C, \end{cases}$$

wenn nämlich:

$$\begin{aligned} A &= \Sigma \pm a_1 p_2 v_3 . \Sigma \pm a_1 q_2 v_3, \\ B &= \Sigma \pm b_1 p_2 v_3 . \Sigma \pm b_1 q_2 v_3, \\ 2C &= \frac{\partial A}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial A}{\partial a_2} b_2 + \frac{\partial A}{\partial a_3} b_3 = \frac{\partial B}{\partial b_1} a_1 + \frac{\partial B}{\partial b_2} a_2 + \frac{\partial B}{\partial b_3} a_3. \end{aligned}$$

Man bemerkt, dafs die Aufstellung der Gleichung (2.) lediglich auf der Bestimmung von A beruht, indem sich B, C einfach daraus ableiten

lassen. Es ist aber, wie man leicht übersieht:

$$A = \begin{vmatrix} p_1q_1, & \frac{p_1q_2+p_2q_1}{2}, & \frac{p_1q_3+p_3q_1}{2}, & a_1, & v_1 \\ \frac{p_1q_2+p_2q_1}{2}, & p_2q_2, & \frac{p_2q_3+p_3q_2}{2}, & a_2, & v_2 \\ \frac{p_1q_3+p_3q_1}{2}, & \frac{p_2q_3+p_3q_2}{2}, & p_3q_3, & a_3, & v_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ v_1, & v_2, & v_3, & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

oder wenn man die Gleichung (1^a.) benutzt, um die p, q durch ihre Werthe zu ersetzen:

$$A = \begin{vmatrix} v_{11}+\lambda v_1^2, & v_{12}+\lambda v_1v_2, & v_{13}+\lambda v_1v_3, & a_1, & v_1 \\ v_{21}+\lambda v_2v_1, & v_{22}+\lambda v_2^2, & v_{23}+\lambda v_2v_3, & a_2, & v_2 \\ v_{31}+\lambda v_3v_1, & v_{32}+\lambda v_3v_2, & v_{33}+\lambda v_3^2, & a_3, & v_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ v_1, & v_2, & v_3, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch Abziehen der äufsersten Reihen zerstört man sogleich Alles, was mit λ multiplicirt ist, so dafs

$$A = \begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & a_1, & v_1 \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & a_2, & v_2 \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & a_3, & v_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & 0 \\ v_1, & v_2, & v_3, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man noch bemerkt, dafs

$$2v_i = v_{1i}y_1 + v_{2i}y_2 + v_{3i}y_3,$$

so erhält man durch eine ähnliche Operation:

$$A = \tfrac{1}{4}\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & a_1, & 0 \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & a_2, & 0 \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & a_3, & 0 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0, & -a \\ 0, & 0, & 0, & -a, & -6v \end{vmatrix} = -\frac{a^2}{4}\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13} \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23} \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33} \end{vmatrix} - \tfrac{6}{4}v\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & a_1 \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & a_2 \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & a_3 \\ a_1, & a_2, & a_3, & 0 \end{vmatrix},$$

wo a den Ausdruck

$$a = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3$$

bezeichnet. — Ich setze jetzt, nach der Bezeichnung des Herrn ***Aronhold:***

$$\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13} \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23} \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33} \end{vmatrix} = 36.\Delta(v);$$

und aufserdem sei

$$\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & a_1 \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & a_2 \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & a_3 \\ b_1, & b_2, & b_3, & 0 \end{vmatrix} = \binom{a}{b}.$$

Alsdann wird

$$4A = -36a^2.\Delta(v) - 6v\binom{a}{a};$$

und ebenso:

$$4B = -36b^2.\Delta(v) - 6v\binom{b}{b},$$

$$4C = -36ab.\Delta(v) - 6v\binom{a}{b}.$$

Und so geht die Gleichung (2.), abgesehen von einem Zahlenfactor, in folgende über:

$$0 = 4\left\{6ab.\Delta(v) + v\binom{a}{b}\right\}^3 - 3\left\{6a^2.\Delta(v) + v\binom{a}{a}\right\}\left\{6b^2.\Delta(v) + v\binom{b}{b}\right\}\left\{6ab.\Delta(v) + v\binom{a}{b}\right\}.$$

Es bleibt übrig hier die symbolischen Substitutionen auszuführen. Zunächst erkennt man, dafs nach der Definition der a und b:

$$a^3 = b^3 = v.$$

Ordnet man jetzt die ganze Gleichung nach Potenzen von $\Delta(v)$, so sieht man, dafs der Factor v als unwesentlich sich ausscheiden läfst; und man erhält dann:

$$(3.)\quad 0 = 6^3.v(\Delta(v))^3 + P.3.6^2.(\Delta(v))^2 + Q.3.6.v.\Delta(v) + v^2.R,$$

wenn man den Ausdrücken P, Q, R die Bedeutung beilegt:

$$P = 3a^2b^2\binom{a}{b} - vb\binom{b}{b} - va\binom{a}{a},$$

$$Q = 4ab\binom{a}{b}^2 - a^2\binom{a}{b}\binom{b}{b} - b^2\binom{a}{b}\binom{a}{a} - ab\binom{a}{a}\binom{b}{b},$$

$$R = 4\binom{a}{b}^3 - 3\binom{a}{b}\binom{a}{a}\binom{b}{b}.$$

Ich bezeichne jetzt durch V_{ik} die Unterdeterminanten von $36.\Delta(v)$. Dann erhält man sogleich

$$\binom{p}{q} = -\Sigma\Sigma V_{ik}p_iq_k.$$

Nimmt man hinzu dafs

$$a.a_i a_k = b.b_i b_k = \tfrac{1}{6} v_{ik},$$

so findet sich:

$$a\binom{a}{a} = b\binom{b}{b} = -\tfrac{1}{6}\Sigma\Sigma V_{ik}.v_{ik} = -\frac{3.36}{6}\Delta(v) = -18\Delta(v),$$

$$a^2 b^2\binom{a}{b} = -\tfrac{1}{6}\Sigma\Sigma\Sigma V_{ik} v_{ih} x_h.b^2.b_k = -6.v.\Delta(v).$$

Hienach hat man zunächst

$$P = -18v.\Delta(v) + 36.v.\Delta(v) = 18v.\Delta(v).$$

Um Q zu berechnen, bemerkt man, dafs

$$ab\binom{a}{b}^2 = ab\Sigma\Sigma V_{ik} V_{mn} a_i b_k.a_m b_n = \tfrac{1}{36}\Sigma\Sigma V_{ik} V_{mn} v_{im} v_{kn}.$$

Da aber $\Sigma_i V_{ik} v_{im}$ verschwindet, wenn nicht $n = m$ ist, so wird dies

$$= 108(\Delta(v))^2.$$

Sodann wird:

$$a^2\binom{a}{b}\binom{b}{b} = b^2\binom{a}{b}\binom{a}{a} = -\binom{b}{b}.\tfrac{1}{6}\Sigma\Sigma\Sigma V_{ik} v_{ih} x_h.b_k = -6b\binom{b}{b}.\Delta(v) = 108.(\Delta(v))^2.$$

Daher ist

$$Q = -108.(\Delta(v))^2,$$

und die Gleichung (3.) geht, indem wiederum ein Factor v abgeschieden wird, über in:

$$0 = R.v + 6^2.(\Delta(v))^3.$$

Es bleibt noch übrig, dem Ausdruck R eine passende Gestalt zu geben. Derselbe wird durch Einführung der V_{ik}:

$$R = -4\Sigma\Sigma\Sigma V_{ik} V_{mn} V_{pq} a_{imq} a_{knp} + 3\Sigma\Sigma\Sigma V_{ik} V_{mq} V_{pn} a_{imq} a_{knp}.$$

Nach einem bekannten Satze ist nun

$$V_{mn} V_{pq} - V_{mq} V_{pn} = 36\Delta(v).V_{mn,pq} = -36\Delta(v).V_{mq,pn},$$

durch $V_{mn,pq}$ eine Unterdeterminante zweiter Ordnung bezeichnet. Daher hat man

$$R = -\Sigma\Sigma\Sigma V_{ik} V_{mq} V_{pn}.a_{imq} a_{knp} + 144\Delta(v)\Sigma\Sigma\Sigma V_{ik} V_{mq,pn} a_{imq} a_{knp}.$$

Sind aber Δ_i, Δ_{ik} erste und zweite Differentialquotienten von Δ, so ist offenbar

$$\Sigma_{mq} V_{mq} a_{imq} = 6\Delta_i,$$

$$\Sigma_{mq}\Sigma_{np} V_{mq,pn} a_{imq} a_{kpn} = \Delta_{ik}.$$

Daher endlich

$$R = -36\Sigma\Sigma V_{ik}\Delta_i\Delta_k + 144\Delta(v)\Sigma\Sigma V_{ik}\Delta_{ik}.$$

Der Ausdruck $\Sigma\Sigma V_{ik}\varDelta_{ik}$ läfst sich noch sehr vereinfachen; er ist der Coefficient von a^2b in der Entwicklung von

$$36\varDelta(av+b\varDelta(v)),$$

und also, wie Herr *Aronhold* gezeigt hat (dieses Journal Bd. 55, p. 127)

$$= 36.3S.v,$$

durch S die erste Invariante von v bezeichnet. Auf diese Weise erhält man endlich die gesuchte Gleichung, wenn man noch einen Zahlenfactor ausläfst:

$$(\varDelta(v))^3+72Sv^2\varDelta(v)-v.\tfrac{1}{6}\Sigma\Sigma V_{ik}\varDelta_i\varDelta_k = 0\,^*),$$

welche das Product aller Gleichungen der Wendetangenten ausdrücken mufs.

§. 4.

Aus dieser Formel folgt sehr leicht der erwähnte Satz. Denn betrachtet man jetzt den Durchschnitt der Wendetangenten mit der Curve $\varDelta=0$, so erhält man aus der so eben abgeleiteten Gleichung:

$$\Sigma\Sigma V_{ik}\varDelta_i\varDelta_k = 0.$$

Da aber $\varDelta$ verschwinden soll, so müssen sich immer solche Zahlen p_i bestimmen lassen, dafs

$$V_{ik} = p_i p_k,$$

wodurch der obige Ausdruck in ein Quadrat übergeht. Daher fallen immer zwei Schnittpunkte in einen zusammen, und die Wendepunktstangente wird Tangente von $\varDelta$.

Hieraus lassen sich weitere geometrische Deutungen erhalten. Bekanntlich ist $S=0$ die Bedingung, dafs v in die Summe von drei Cuben, mithin $\varDelta$ in drei lineare Factoren zerfalle. Wird also dann die Determinantencurve ein Dreieck, so können die Wendepunktstangenten sie nur so berühren, dafs sie durch die drei Ecken des Dreiecks gehen. Man hat also den Satz:

Die Gleichung $S=0$ ist der Ausdruck dafür, dafs die Wendepunktstangenten sich zu dreien in den Ecken eines Dreiecks schneiden, dessen Seiten durch die Wendepunkte hindurchgehen.

Betrachtet man das System von Curven $av+b\varDelta(v)$, welches dieselben Wendepunkte hat, so enthält dasselbe vier Dreiecke, demnach auch vier Curven, deren S_{ab} verschwindet; wie die Gleichung S_{ab}, welche vom vierten Grade ist, auch angiebt. Also:

---

*) Man vergleiche *Salmon*, Lessons on higher Algebra pag. 116.

Es giebt vier Curven, welche gleiche Wendepunkte haben, und deren Wendetangenten sich in den Ecken der vier Wendepunktsdreiecke zu dreien durchschneiden.

Da also jede Wurzel von $S_{ab}=0$ einer *bestimmten* Wurzel von $G=0$ (welches die vier Wendepunktsdreiecke ergiebt) entspricht, so folgt hieraus geometrisch von vorn herein, dafs die Wurzeln von S sich durch die Wurzeln von G müssen darstellen lassen, dafs also die cubische Resolvente beider Gleichungen dieselbe sein wird.

Die Gleichung $T=0$ drückt bekanntlich aus, dafs die Determinante von Δ wieder in v übergehe. Dies wird sich nun geometrisch folgendermafsen ausdrücken lassen:

Die Gleichung $T=0$ ist der Ausdruck dafür, dafs die Curve $v=0$ mit einer andern, $\Delta=0$, welche dieselben Wendepunkte hat, in der Weise zusammenhängt, dafs die Wendepunktstangenten einer Curve immer die andere berühren.

Solcher Paare giebt es in jedem System mit den nämlichen Wendepunkten drei, da T_{ab} vom sechsten Grade ist.

Eben diese Bemerkung zeigt aber sofort, dafs, wie oben anders nachgewiesen ist, die Gleichung $T_{ab}=0$ algebraisch lösbar sein mufs, durch eine cubische Gleichung, welche den drei Paaren entspricht, und durch quadratische Gleichungen, welche die Glieder der Paare ergeben. Es enthält dies aufserdem die unmittelbar geometrische Bedeutung der cubischen Gleichung, auf welche oben die Auflösung von $S=0$, $S_{ab}=0$, $T_{ab}=0$ zurückgeführt wurde.

Ich bemerke noch, dafs durch den oben ausgesprochenen Satz die Curve $\Delta=0$ geometrisch definirt werden kann. Denn sie ist die *einzige* Curve dritter Ordnung, welche durch die neun Wendepunkte von $v=0$ hindurchgeht und zugleich von den Wendepunktstangenten der letzteren Curve noch berührt wird. Umgekehrt wird jede Curve des Systems $av+b\Delta(v)$ von den Wendepunktstangenten *dreier* anderen berührt, da es bekanntlich immer drei verschiedene Functionen dritter Ordnung giebt, als deren Determinante eine gegebene angesehen werden darf.

Carlsruhe, den 13[ten] April 1860.

Ueber die Anziehung einer mit Masse belegten abwickelbaren Fläche auf einen materiellen Punkt.

(Von Herrn *Mehler* zu Fraustadt.)

Wenn ein materieller Punkt von jedem Elemente einer krummen Oberfläche proportional einer Potenz der Entfernung und proportional der auf dem Elemente vertheilten Masse angezogen wird, so lassen sich die Componenten der Gesammtanziehung, welche er erfährt, bekanntlich als die partiellen Differentialquotienten ein und desselben Doppelintegrales darstellen. In diesem Doppelintegrale ist keine der beiden Integrationen ausführbar, so lange über die Natur der Fläche und die Art der Massenvertheilung nicht besondere, einfache Voraussetzungen gelten. Der Zweck der folgenden Zeilen ist, auf einen Fall aufmerksam zu machen, in welchem die Aufgabe für eine beliebige abwickelbare Fläche sich auf Quadraturen zurückführen läfst, und die einfachen Resultate herzuleiten, welche daraus für Kegelflächen und insbesondere für den geraden Kegel sich ergeben.

Die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Wendungscurve der abwickelbaren Fläche seien als Functionen einer Veränderlichen α gegeben vermöge der Gleichungen:

$$(1.)\qquad \xi = \varphi\alpha,\quad \eta = \psi\alpha,\quad \zeta = \chi\alpha,$$

und unter α möge der Einfachheit wegen der Bogen der Curve, von einem festen Punkte aus gerechnet, verstanden werden. Alsdann sind $\varphi'\alpha$, $\psi'\alpha$, $\chi'\alpha$ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente im Punkte (ξ, η, ζ), nach der Seite hin gezogen, nach welcher der Bogen wächst, mit den Coordinatenaxen bildet, und man hat die Bedingungsgleichung:

$$(2.)\qquad (\varphi'\alpha)^2+(\psi'\alpha)^2+(\chi'\alpha)^2 = 1,$$

und daher auch die folgende:

$$(2'.)\qquad \varphi'\alpha\varphi''\alpha+\psi'\alpha\psi''\alpha+\chi'\alpha\chi''\alpha = 0.$$

Trägt man auf irgend einer Tangente vom Berührungspunkte aus eine Strecke u ab, so werden die Coordinaten x, y, z des Endpunktes, der stets ein Punkt der abwickelbaren Fläche ist, als Functionen von α und u bestimmt durch die Gleichungen:

$$(3.)\qquad x = \varphi\alpha+u\varphi'\alpha,\quad y = \psi\alpha+u\psi'\alpha,\quad z = \chi\alpha+u\chi'\alpha.$$

Läfst man hierin α den ganzen Bogen der Wendungscurve durchlaufen und u alle möglichen positiven Werthe annehmen, so erhält man nur die Punkte auf dem einen von den beiden Theilen, in welche die abwickelbare Fläche durch die Wendungscurve getheilt wird. Will man auch den anderen Theil der Fläche erschöpfen, so mufs man die Strecke u auch auf den Richtungen der Tangenten abtragen, welche mit den Axen Winkel bilden, deren Cosinus respective $= -\varphi'\alpha,\ -\psi'\alpha,\ -\chi'\alpha$ sind; oder man mufs in (3.) der Gröfse u auch alle Werthe von 0 bis $-\infty$ ertheilen.

Die abwickelbare Fläche sei so mit Masse belegt, dafs die Dichtigkeit k für verschiedene Punkte auf derselben Tangente der Entfernung vom Berührungspunkte umgekehrt proportional ist, während sie von Tangente zu Tangente sich noch stetig ändern kann. Dieses Gesetz, das die Dichtigkeit befolgen soll, kann dargestellt werden durch die Formel:

$$(4.)\qquad k = \frac{f\alpha}{\pm u},$$

worin $f\alpha$ eine beliebige Function von α und $\pm u$ den absoluten Werth der Entfernung bezeichnet. Die Kraft, mit welcher die Masseneinheit einen materiellen Punkt in der Entfernung r anzieht, sei $=\frac{1}{r^p}$. Es soll die Anziehung eines Theiles der Fläche berechnet werden, der zwischen zwei, zu den Bogen α_0 und α_1 gehörigen Tangenten enthalten ist.

Es seien a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punktes, A, B, C die Componenten der Anziehung, $d\omega$ das Oberflächenelement für den Punkt (x, y, z), r die Entfernung der Punkte (a, b, c) und (x, y, z), so dafs:

$$(5.)\qquad r^2 = (a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2;$$

dann hat man für A den Ausdruck:

$$(6.)\qquad A = -\int \frac{1}{r^p}\,\frac{a-x}{r}\,k\,d\omega$$

und ganz ähnliche für B und C. Setzt man:

$$(7.)\qquad T = \frac{1}{p-1}\int \frac{k\,d\omega}{r^{p-1}},$$

so wird:

$$(8.)\qquad A = \frac{\partial T}{\partial a},\quad B = \frac{\partial T}{\partial b},\quad C = \frac{\partial T}{\partial c},$$

und die Aufgabe besteht jetzt in der Bestimmung des Integrales T. Für das Oberflächenelement ergiebt sich durch geometrische Betrachtungen oder mit

Hülfe der bekannten Formel:

$$d\omega =$$

$$d\alpha\, du\sqrt{\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]-\left[\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial u}\right]^2}$$

sehr leicht der Ausdruck:

$$d\omega = \pm u\sqrt{(\varphi''\alpha)^2+(\psi''\alpha)^2+(\chi''\alpha)^2}\,d\alpha\, du,$$

welcher durch Einführung des Krümmungshalbmessers ϱ der Wendungscurve die Form annimmt:

$$d\omega = \frac{\pm u\, d\alpha\, du}{\varrho}.$$

Daher wird:

$$(9.)\qquad k\, d\omega = \frac{f\alpha\, d\alpha}{\varrho}du,$$

und folglich:

$$(10.)\qquad T = \frac{1}{p-1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{f\alpha\, d\alpha}{\varrho}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{r^{p-1}}.$$

Aus (5.) und (3.) folgt:

$$r^2 = (a-\varphi\alpha-u\varphi'\alpha)^2+(b-\psi\alpha-u\psi'\alpha)^2+(c-\chi\alpha-u\chi'\alpha)^2.$$

Setzt man daher:

$$(11.)\qquad \begin{cases}(a-\varphi\alpha)^2+(b-\psi\alpha)^2+(c-\chi\alpha)^2 = l^2,\\ (a-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+(b-\psi\alpha)\psi'\alpha+(c-\chi\alpha)\chi'\alpha = m,\end{cases}$$

so dafs l den Leitstrahl von einem Punkte $(\varphi\alpha, \psi\alpha, \chi\alpha)$ der Wendungscurve nach (a, b, c), und m die Projection desselben auf die zugehörige Tangente bedeutet, so wird:

$$r^2 = l^2-2mu+u^2 = l^2-m^2+(u-m)^2,$$

also, wenn $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{r^{p-1}}$ durch U bezeichnet wird:

$$U = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{[l^2-m^2+(u-m)^2]^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Durch die Substitution:

$$u = m+(l^2-m^2)^{\frac{1}{2}}v$$

folgt hieraus:

$$U = (l^2-m^2)^{1-\frac{p}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{p-1}{2}}} = 2(l^2-m^2)^{1-\frac{p}{2}}\int_0^{\infty}\frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{p-1}{2}}}.$$

Man sieht jetzt beiläufig, dafs $p>2$ sein mufs, damit U und folglich T nicht

unendlich werde. Setzt man $v = w^{\frac{1}{2}}$, so erhält man:

$$2\int_0^\infty \frac{dv}{(1+v^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \int_0^\infty \frac{w^{\frac{1}{2}-1}\,dw}{(1+w)^{\frac{1}{2}+\left(\frac{p}{2}-1\right)}} = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{p}{2}-1\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)},$$

also ist:

$$U \text{ oder } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{r^{p-1}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)} (l^2 - m^2)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Durch Einführung dieses Werthes in (10.) erhält man, unter Berücksichtigung, dafs:

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),$$

für T den Ausdruck:

$$(12.)\quad T = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}-1\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha\, f\alpha}{\varrho} (l^2 - m^2)^{1-\frac{p}{2}},$$

und wenn man diese Gleichung partiell nach a, b, c differentiirt und bemerkt, dafs nach (11.):

$$\frac{\partial(l^2)}{\partial a} = 2(a - \varphi\alpha), \quad \frac{\partial(m^2)}{\partial a} = 2m\varphi'\alpha, \text{ u. s. w.,}$$

so ergeben sich für die Attractionscomponenten die Formeln:

$$(13.)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha\, f\alpha}{\varrho} \cdot \frac{a - \varphi\alpha - m\varphi'\alpha}{(l^2 - m^2)^{\frac{p}{2}}}, \\[2ex] B = -\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \displaystyle\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha\, f\alpha}{\varrho} \cdot \frac{b - \psi\alpha - m\psi'\alpha}{(l^2 - m^2)^{\frac{p}{2}}}, \\[2ex] C = -\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha_1} \frac{d\alpha\, f\alpha}{\varrho} \cdot \frac{c - \chi\alpha - m\chi'\alpha}{(l^2 - m^2)^{\frac{p}{2}}}. \end{cases}$$

Die Gröfsen unter den Integralzeichen haben eine einfache Bedeutung, welche eine geometrische Interpretation der gewonnenen Formeln gestattet.

Es ist nämlich $(l^2-m^2)^{\frac{1}{2}}$ die Länge des Lothes, das man von (a, b, c) auf die Tangente der Wendungscurve im Punkte $(\varphi\alpha, \psi\alpha, \chi\alpha)$ fällt; es sind ferner $\varphi\alpha+m\varphi'\alpha$, $\psi\alpha+m\psi'\alpha$, $\chi\alpha+m\chi'\alpha$ die Coordinaten des Fufspunktes dieses Lothes, und folglich $a-\varphi\alpha-m\varphi'\alpha$, $b-\psi\alpha-m\psi'\alpha$, $c-\chi\alpha-m\chi'\alpha$ die Projectionen desselben auf die Coordinatenaxen. Bezeichnet man daher die Länge des Lothes mit n und durch λ, μ, ν die Winkel, welche es mit den Axen bildet, und schreibt P statt des numerischen Factors $\dfrac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$, so wird:

$$A=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{Pd\alpha f\alpha}{\varrho}\cdot\frac{1}{n^{p-1}}\cdot\cos\lambda,$$

u. s. w.

Also kann die Anziehung der abwickelbaren Fläche ersetzt werden durch die Anziehung der Fufspunktencurve ihrer Wendungscurve für den angezogenen Punkt als Pol, vorausgesetzt dafs jedes $d\alpha$ entsprechende Bogenelement der Fufspunktencurve die Masse $\dfrac{Pd\alpha f\alpha}{\varrho}$ erhält und den materiellen Punkt umgekehrt proportional, nicht der p^{ten}, sondern der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz der Entfernung anzieht.

Auch die Art der Massenvertheilung auf der anziehenden Curve läfst eine einfache geometrische Deutung zu. Trägt man nämlich auf den Tangenten der Wendungscurve von den Berührungspunkten aus Stücke von der constanten Länge P ab, so dafs die Endpunkte eine neue Curve auf der abwickelbaren Fläche bestimmen, so enthält der Streifen der Oberfläche, welcher von zwei unendlich nahen Tangenten und den zugehörigen Bogenelementen der Wendungs- und der eben construirten Curve begrenzt wird, stets gerade diejenige Masse, welche dem zwischen den beiden nämlichen Tangenten gelegenen Bogenelemente der Fufspunktencurve mitzutheilen ist. Denn vermöge (9.) ist die Masse jenes Streifens

$$=\frac{d\alpha f\alpha}{\varrho}\int_0^P du=\frac{Pd\alpha f\alpha}{\varrho}.$$

Ist $p\leqq 2$, so haben die angestellten Rechnungen keine Gültigkeit mehr. Behandelt man aber in diesem Falle unmittelbar die Attractionscomponenten auf dieselbe Weise, wie dies mit T geschah, so findet man ohne Mühe, dafs sie noch durch die Formeln (13.) ausgedrückt werden, wenn p zwischen 2

und 1 liegt, dafs sie dagegen unbestimmt oder unendlich grofs werden, wenn $p \leqq 1$ ist.

Für $p = 2$, d. h. für den Fall des *Newton*schen Attractionsgesetzes, lehrt die Gleichung (12.), dafs das Potential der abwickelbaren Fläche unendlich grofs ist; für die Componente A aber ergiebt sich aus (13.) der endliche Werth:

$$A = -2\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha f\alpha}{\varrho} \cdot \frac{a - \varphi\alpha - m\varphi'\alpha}{l^2 - m^2},$$

und ähnliche für B und C. Man sieht, dafs die Attractionscomponenten hier die nach a, b, c genommenen partiellen Differentialquotienten des Integrales

$$T' = -\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha f\alpha}{\varrho} \log(l^2 - m^2)$$

sind, und man überzeugt sich leicht, dafs T' aus T hervorgeht, wenn man von T die Constante

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2} - 1\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \frac{d\alpha f\alpha}{\varrho}$$

subtrahirt und alsdann erst $p = 2$ setzt.

Um die für jede abwickelbare Fläche gültigen Formeln (13.) auf Kegelflächen, für welche die Wendungscurve sich auf einen Punkt reducirt, anwenden zu können, setze man zunächst:

$$\varphi\alpha = \varepsilon\Phi\frac{\alpha}{\varepsilon}, \quad \psi\alpha = \varepsilon\Psi\frac{\alpha}{\varepsilon}, \quad \chi\alpha = \varepsilon X\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

also:

$$\varphi'\alpha = \Phi'\frac{\alpha}{\varepsilon}, \quad \psi'\alpha = \Psi'\frac{\alpha}{\varepsilon}, \quad \chi'\alpha = X'\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

und darauf:

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \beta, \quad \varepsilon = 0.$$

Alsdann gehen die Gleichungen (3.) über in:

$$(14.) \quad x = u\Phi'\beta, \quad y = u\Psi'\beta, \quad z = uX'\beta$$

und stellen eine beliebige Kegelfläche dar, deren Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt; es wird:

$$(15.) \quad \frac{d\alpha}{\varrho} = d\beta\sqrt{(\Phi''\beta)^2 + (\Psi''\beta)^2 + (X''\beta)^2} = \frac{d\beta}{P}, \quad f\alpha = F\beta,$$

$$(16.) \quad l^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad m = a\Phi'\beta + b\Psi'\beta + cX'\beta,$$

und die Gleichungen (13.) geben für die Componenten der Anziehung, welche ein zwischen zwei beliebigen Seitenlinien enthaltenes Stück der Kegelfläche ausübt:

$$(17.)\qquad A = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\frac{d\beta F\beta}{P}\,\frac{a-m\Phi'\beta}{(l^2-m^2)^{\frac{p}{2}}}.$$

u. s. w.

Die Gröfse l, welche jetzt die Entfernung des angezogenen Punktes vom Anfangspunkte bedeutet, ist von β unabhängig, und es sind l und m homogene Functionen des ersten Grades von a, b und c. Setzt man demnach:

$$a = l\cos\lambda,\qquad b = l\sin\lambda\cos\mu,\qquad c = l\sin\lambda\sin\mu,$$

so nehmen die Ausdrücke für die Attractionscomponenten die Form an:

$$A = \frac{L}{l^{p-1}},\qquad B = \frac{M}{l^{p-1}},\qquad C = \frac{N}{l^{p-1}},$$

worin L, M, N nur von λ und μ abhängen, also für Punkte auf derselben durch den Ursprung gehenden Geraden constant sind. Daher gilt der Satz:

Die Anziehung der Kegelfläche auf verschiedene Punkte desselben vom Ursprung ausgehenden Radiusvectors ist für alle gleich gerichtet und der $(p-1)^{\text{ten}}$ Potenz des Abstandes vom Mittelpunkte umgekehrt proportional.

Gilt das *Newton*sche Anziehungsgesetz, so erhält die nach dem Mittelpunkt gerichtete Componente Q vermöge (17.) den Werth:

$$(18.)\qquad Q = -A\frac{a}{l} - B\frac{b}{l} - C\frac{c}{l} = \frac{2}{l}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\frac{d\beta F\beta}{P}.$$

Diese Componente ist also constant für alle gleich weit vom Mittelpunkt entfernte Punkte, und für Punkte, die ungleichen Abstand haben, diesem Abstande umgekehrt proportional.

Wir betrachten noch besonders den sehr einfachen Fall, dafs der Kegel ein Umdrehungskegel, dafs die Dichtigkeit für alle Seitenlinien in gleichem Abstand vom Mittelpunkte auch gleich grofs, und zwar im Abstand 1 gleich 1 ist, und dafs die Anziehung nach dem *Newton*schen Gesetze erfolgt.

Die X-Axe sei die Rotationsaxe des Kegels, ε der constante Winkel derselben mit den Seitenlinien und β der Winkel, den die Projection einer Seitenlinie auf die Ebene der YZ mit der Axe der Y bildet. Dann wird:

$$\Phi'\beta = \cos\varepsilon,\qquad \Psi'\beta = \sin\varepsilon\cos\beta,\qquad X'\beta = \sin\varepsilon\sin\beta,$$

$$\frac{1}{P} = \sin\varepsilon,\qquad F\beta = 1,\qquad \beta_0 = 0,\qquad \beta_1 = 2\pi,\qquad p = 2,$$

und für m erhält man aus (16.), wenn:

$$(19.) \quad a = l\cos\lambda, \quad b = l\sin\lambda\cos\mu, \quad c = l\sin\lambda\sin\mu$$

und:

$$(20.) \quad \cos\lambda\cos\varepsilon + \sin\lambda\sin\varepsilon\cos(\beta-\mu) = \cos\vartheta$$

gesetzt wird:

$$(21.) \quad m = l\cos\vartheta.$$

Durch Einführung dieser Werthe ergiebt sich aus (17.):

$$(22.) \quad A = -\frac{2\sin\varepsilon}{l}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\lambda-\cos\varepsilon\cos\vartheta}{1-\cos^2\vartheta}\,d\beta.$$

Dieser Ausdruck läfst sich darstellen in der Form:

$$A = -\frac{\sin\varepsilon}{l}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varepsilon+\cos\lambda}{1+\cos\vartheta}\,d\beta - \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varepsilon-\cos\lambda}{1-\cos\vartheta}\,d\beta\right\}.$$

Substituirt man hierin für $\cos\vartheta$ seinen Werth aus (20.) und setzt $\beta-\mu=2\gamma$, so erhält man nach einigen Umformungen:

$$A = -\frac{4\sin\varepsilon}{l}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon)\cos\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)\,d\gamma}{\cos^2\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon)\cos^2\gamma+\cos^2\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)\sin^2\gamma} - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon)\sin\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)\,d\gamma}{\sin^2\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon)\cos^2\gamma+\sin^2\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)\sin^2\gamma}\right\},$$

also ist:

$$A = -\frac{4\sin\varepsilon}{l}\left\{\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(\lambda+\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\lambda-\varepsilon)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\pi\right)\right\}.$$

Jeder der beiden Kreisbogen, deren Differenz in der Parenthese steht, erhält den Werth $+\frac{1}{2}\pi$ oder $-\frac{1}{2}\pi$, je nachdem sein, in jedem Falle unendlich grofses Argument positiv oder negativ ist. Nun kann man alle möglichen Lagen des angezogenen Punktes erschöpfen, wenn man μ von 0 bis 2π, λ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und l von $-\infty$ bis ∞ variiren läfst, und zwar wird der Punkt aufserhalb oder innerhalb des Kegels liegen, je nachdem man λ zwischen ε und $\frac{1}{2}\pi$ oder zwischen 0 und ε wählt. Demnach ist statt des ersten Kreisbogens offenbar stets $\frac{1}{2}\pi$, statt des zweiten dagegen $\frac{1}{2}\pi$ für einen äufseren und $-\frac{1}{2}\pi$ für einen inneren Punkt zu setzen. Also hat man *für einen äufseren Punkt:*

$$(23.) \quad A = 0,$$

und *für einen inneren Punkt:*

$$(23'.) \quad A = -\frac{4\pi\sin\varepsilon}{l}.$$

Um auch die beiden anderen Componenten der Anziehung zu berechnen, benutzt man am einfachsten die Gleichungen:

$$(24.) \quad \begin{cases} Aa + Bb + Cc = -4\pi\sin\varepsilon, \\ Bc - Cb = 0, \end{cases}$$

von denen die erste aus (18.), die zweite aber daraus folgt, dafs die Richtung der Resultante die Axe des Kegels schneiden mufs. Mit Hülfe derselben erhält man für einen aufserhalb gelegenen Punkt:

$$(25.)\quad \begin{cases} A = 0, \\ B = -4\pi\sin\varepsilon\dfrac{b}{b^2+c^2} = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon\cos\mu}{l\sin\lambda}, \\ C = -4\pi\sin\varepsilon\dfrac{c}{b^2+c^2} = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon\sin\mu}{l\sin\lambda}. \end{cases}$$

Die Anziehung ist also senkrecht nach der Axe hin gerichtet, und ihre Intensität der Entfernung des angezogenen Punktes von der Axe umgekehrt proportional.

Für einen im Innern des Kegels befindlichen Punkt gelten dagegen die Formeln:

$$(25'.)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon}{l}, \\ B = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon\, b}{l(l+a)} = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\lambda\cos\mu}{l}, \\ C = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon\, c}{l(l+a)} = -\dfrac{4\pi\sin\varepsilon\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\lambda\sin\mu}{l}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dafs die mit der Axe des Kegels parallele Componente nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher der Mittelpunkt des Kegels sich befindet. Die nach dem Mittelpunkt hin gerichtete Componente hat nach (18.) den Werth $\frac{4\pi\sin\varepsilon}{l}$, ist also gleich grofs mit der parallel zur Axe gerichteten. Bemerkt man noch, dafs die Ebene dieser beiden Componenten auch die Resultante enthält, so gelangt man zu der folgenden einfachen Construction der Resultante für einen innern Punkt:

Man ziehe von dem angezogenen Punkte eine Gerade nach dem Mittelpunkte und eine andere parallel zur Axe, trage auf ihnen gleiche Strecken ab von der Länge $\frac{4\pi\sin\varepsilon}{l}$ und construire mit denselben einen Rhombus: alsdann wird die Resultante der Gröfse und Richtung nach dargestellt durch die Diagonale dieses Rhombus.

Die Richtung der Resultante halbirt folglich den spitzen Winkel, welchen der Radiusvector nach dem Mittelpunkte und die Parallele zur Axe mit einander bilden.

Fraustadt, im April 1860.

Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums.

(Von Herrn *O. Röthig.*)

Der vorliegende Aufsatz hat den Zweck, zu zeigen, dafs das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums in Beziehung auf einen beliebigen Punkt durch einen Ausdruck dargestellt wird, welcher *auf rationale Weise aus Logarithmen und Arctang.* zusammengesetzt ist. Der Beweis dieser Behauptung wird nicht nur direct durch Integration geleistet werden, sondern auch durch Verification des gefundenen Ausdruckes nach der von *Dirichlet* im 32sten Bande dieses Journals gegebenen allgemeinen Methode.

Nennt man die Seiten eines rechtwinkligen Parallelepipedums $2a$, $2b$, $2c$ und legt den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt, so ist das zu bestimmende Potential in Beziehung auf einen Punkt (ξ, η, ζ) ausgedrückt durch:

$$(1.)\qquad P = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c}\frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

wo

$$r^2 = (x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

und die constante Dichtigkeit gleich der Einheit gesetzt ist. In dieser Gleichung sind die Gröfsen a, b, c ihrer Bedeutung nach positiv, es soll deshalb der von dieser Einschränkung unabhängige Werth des Integrales in (1.) mit $\Phi(a, b, c, \xi, \eta, \zeta)$ bezeichnet werden.

Schreibt man nun in dem Integrale in Bezug auf x in (1.) x für $x-\xi$, so geht dasselbe über in:

$$\int_{-a-\xi}^{+a-\xi}\frac{dx}{r} = \int_{-a-\xi}^{0}\frac{dx}{r}+\int_{0}^{a-\xi}\frac{dx}{r},$$

wo

$$r^2 = x^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2.$$

Für die beiden Integrale auf der rechten Seite darf aber, wie leicht erhellt, geschrieben werden:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-(a+\xi)}^{+(a+\xi)}\frac{dx}{r}+\tfrac{1}{2}\int_{-(a-\xi)}^{+(a-\xi)}\frac{dx}{r},$$

und durch Einführung dieser Summe für das Integral in Beziehung auf x in (1.) folgt:

$$(2.)\qquad 2P = \Sigma\Phi(a+\varepsilon\xi, b, c, 0, \eta, \zeta),$$

wo für ε die Werthe $+1$ und -1 zu setzen sind, und die Summe sich auf die Addition der so erhaltenen Glieder bezieht. Behandelt man jetzt auf dieselbe Weise das Integral in Beziehung auf y in dem Ausdruck unter dem Summenzeichen in (2.), so überzeugt man sich leicht, dafs:

$$\Phi(a+\varepsilon\xi, b, c, 0, \eta, \zeta) = \Sigma\Phi(a+\varepsilon\xi, b+\varepsilon'\eta, c, 0, 0, \zeta),$$

und endlich folgt durch gleiche Behandlung des Integrales in Beziehung auf z:

$$\Phi(a+\varepsilon\xi, b+\varepsilon'\eta, c, 0, 0, \zeta) = \Sigma\Phi(a+\varepsilon\xi, b+\varepsilon'\eta, c+\varepsilon''\zeta, 0, 0, 0).$$

Die Summen in beiden Gleichungen beziehen sich resp. auf ε' und ε'', welche Gröfsen dieselbe Bedeutung haben wie ε in (2.).

Durch successive Anwendung der beiden vorstehenden Gleichungen erhält man nun aus (2.), wenn noch in Φ die Argumente, welche den Werth 0 haben, fortgelassen werden:

$$(3.)\qquad 8P = \Sigma\Phi(a+\varepsilon\xi, b+\varepsilon'\eta, c+\varepsilon''\zeta).$$

Hierin haben die Gröfsen ε, ε', ε'' die Werthe $+1$ und -1, und die Summe erstreckt sich auf die acht Glieder, welche man dadurch erhält, dafs den Gröfsen ε, ε', ε'' ihre verschiedenen Werthe beigelegt werden.

Es kommt daher nur noch darauf an einen Ausdruck für $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$, wo α, β, γ irgend welche reelle Gröfsen bedeuten, zu finden. Nun hat aber zu Folge von (1.) $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ die Form:

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

wo:

$$r^2 = x^2+y^2+z^2.$$

Setzt man hierin $\vartheta\alpha$ für α, $\vartheta\beta$ für β, $\vartheta\gamma$ für γ, so wird:

$$\Phi(\vartheta\alpha, \vartheta\beta, \vartheta\gamma) = \int_{-\vartheta\alpha}^{+\vartheta\alpha}\int_{-\vartheta\beta}^{+\vartheta\beta}\int_{-\vartheta\gamma}^{+\vartheta\gamma}\frac{dx\,dy\,dz}{r},$$

und wenn nun in diesem Integrale ϑx für x, ϑy für y, ϑz für z geschrieben wird, so folgt:

$$\Phi(\vartheta\alpha, \vartheta\beta, \vartheta\gamma) = \vartheta^2\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

oder

$$\Phi(\vartheta\alpha, \vartheta\beta, \vartheta\gamma) = \vartheta^2\,\Phi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Es ist daher $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ eine *homogene Function zweiten Grades* von α, β, γ und genügt also der partiellen Differentialgleichung:

$$(4.)\qquad 2\Phi = \alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\beta\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\gamma\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach α:

$$(5.)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \gamma},$$

während die Werthe von $\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}$ aus dem Werthe für $\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ durch Vertauschung von α mit β oder α mit γ erhalten werden.

Nun ist aus der Form von $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ leicht ersichtlich, dafs:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 2 \int_{-\beta}^{+\beta} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dy\, dz}{\sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}},$$

also ist auch:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + z^2}},$$

oder, da sich diese Integration sofort ausführen läfst:

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma},$$

wo:

$$\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -2\alpha \int_{-\beta}^{+\beta} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dy\, dz}{(\alpha^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Schreibt man nun für die rechte Seite dieser Gleichung:

$$-\alpha \int_{-\beta}^{+\beta} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dy\, d(z^2)}{z^2 (\alpha^2 + y^2 + z^2) \frac{\sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}}{z}},$$

und setzt dann:

$$\frac{z}{\sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}} = u,$$

wodurch:

$$z^2 = \frac{(\alpha^2 + y^2) u^2}{1 - u^2}, \quad \alpha^2 + y^2 + z^2 = \frac{\alpha^2 + y^2}{1 - u^2}, \quad d(z^2) = \frac{2(\alpha^2 + y^2) u\, du}{(1 - u^2)^2}$$

wird, so folgt sofort:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -4\alpha\gamma \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{dy}{(\alpha^2 + y^2) \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + y^2}}.$$

Dies Integral behandle man auf dieselbe Weise. Es erhält nämlich wiederum leicht die Form:

$$-2\alpha\gamma \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d(y^2)}{y^2 (\alpha^2 + y^2) \frac{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + y^2}}{y}}$$

und geht, unbestimmt genommen, durch die Substitution:

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\gamma^2+y^2}} = z,$$

wodurch:

$$y^2 = \frac{(\alpha^2+\gamma^2)z^2}{1-z^2}, \quad \alpha^2+y^2 = \frac{\alpha^2+\gamma^2 z^2}{1-z^2}, \quad d(y^2) = \frac{2(\alpha^2+\gamma^2)z\,dz}{(1-z^2)^2}$$

wird, über in:

$$-4\alpha\gamma\int\frac{dz}{\alpha^2+\gamma^2 z^2},$$

woraus dann leicht geschlossen wird, dafs

$$(7.)\qquad \frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} = -8\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho};$$

ϱ hat die frühere Bedeutung, und der arctg ist zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen.

Die Gröfsen $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta\partial\gamma}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma\partial\alpha}$; $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\beta^2}$, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\gamma^2}$ erhält man aus (6.) und (7.) durch passende Vertauschung der Gröfsen α, β, γ.

Die Gleichungen (6.) und (7.) enthalten die Lösung der ganzen Aufgabe. Denn es folgt zunächst, indem man aus (6.) durch Vertauschung von β mit γ den Werth von $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\gamma}$ bildet, und dann die gefundenen Ausdrücke in (5.) einsetzt:

$$(8.)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = 4\beta\log\frac{\varrho+\gamma}{\varrho-\gamma}+4\gamma\log\frac{\varrho+\beta}{\varrho-\beta}-8\alpha\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho},$$

und hieraus und aus den mit Leichtigkeit zu bildenden Werthen von $\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}$ und $\frac{\partial\Phi}{\partial\gamma}$ erhält man nach (4.):

$$(9.)\qquad \begin{cases} \Phi(\alpha,\beta,\gamma) = 4\beta\gamma\log\frac{\varrho+\alpha}{\varrho-\alpha}-4\alpha^2\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho} \\ \qquad\qquad +4\gamma\alpha\log\frac{\varrho+\beta}{\varrho-\beta}-4\beta^2\operatorname{arctg}\frac{\gamma\alpha}{\beta\varrho} \\ \qquad\qquad +4\alpha\beta\log\frac{\varrho+\gamma}{\varrho-\gamma}-4\gamma^2\operatorname{arctg}\frac{\alpha\beta}{\gamma\varrho}, \end{cases}$$

wofür auch einfacher geschrieben werden kann:

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma) = 4\,S\left[\beta\gamma\log\frac{\varrho+\alpha}{\varrho-\alpha}-\alpha^2\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho}\right],$$

wenn man das Zeichen S so versteht, dafs in dem unter demselben stehenden Ausdrucke die Gröfsen α, β, γ vertauscht, und die so entstandenen Ausdrücke addirt werden sollen.

Es erhellt hieraus und in Folge der über die arctg gemachten Bemerkung, dafs $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$ mit einem der Argumente sein Zeichen ändert, wie es sein mufs. — Die Gröfse ϱ ist immer positiv zu nehmen.

Ich habe den Ausdruck (9.) zunächst durch Differentiation verificirt. Die Differentiation nach α liefert den in (8.) gegebenen Werth für $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$, in dem die übrigen sechs Glieder, welche $\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}$, so wie es aus (9.) folgt, noch enthält, sich gegenseitig vernichten. Daraus folgt dann durch Differentiation nach β der in (6.) gegebene Werth von $\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha\partial\beta}$, weil wieder die übrigen Glieder, welche die Differentiation liefert, zusammen identisch Null geben. Hieraus erhält man denn schliefslich

$$(10.)\qquad \frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\gamma} = \frac{8}{\varrho},$$

wie es sein mufs.

Die Gleichung (3.) in Verbindung mit (9.) enthält demnach die Form des Potentiales in Beziehung auf einen beliebigen Punkt und beweist zugleich die Richtigkeit der im Anfange ausgesprochenen Behauptung.

Ist ferner $X(\alpha,\beta,\gamma)$ der Ausdruck auf der rechten Seite von (8.) nach Abscheidung des Factors 4, so hat X die Eigenschaft mit β und γ das Zeichen zu ändern, aber nicht mit α, und da ferner die Ableitung von $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$ nach α hierdurch den Werth $4X(\alpha,\beta,\gamma)$ erhält, so folgt aus (3.):

$$(11.)\qquad 2\frac{\partial P}{\partial\xi} = \Sigma\varepsilon X(a+\varepsilon\xi,\, b+\varepsilon'\eta,\, c+\varepsilon''\zeta),$$

und aus (7.)

$$(12.)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} = -\Sigma\operatorname{arctg}\frac{(b+\varepsilon'\eta)(c+\varepsilon''\zeta)}{(a+\varepsilon\xi)R},$$

wo

$$R^2 = (a+\varepsilon\xi)^2+(b+\varepsilon'\eta)^2+(c+\varepsilon''\zeta)^2$$

gesetzt ist. Die Gröfsen $\frac{\partial P}{\partial\eta}$, $\frac{\partial P}{\partial\zeta}$; $\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2}$ erhält man aus (11.) und (12.) durch bezügliche Vertauschung der Gröfsen a, ξ, ε, mit b, η, ε' und c, ζ, ε''. Es sind daher durch die Gleichungen (3.), (11.) und (12.) in Ver-

bindung mit (8.) und (9.) sämmtliche auf die Anziehung eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums bezügliche Gröfsen gefunden.

Obgleich nun die vorstehende Herleitung für das Potential eines rechtwinkligen Parallelepipedums nichts zu wünschen übrig läfst, so möchte es doch von Interesse sein, zu zeigen, dafs der gefundene Ausdruck auch auf ziemlich einfache Weise nach der Methode verificirt werden kann, welche ***Dirichlet*** im 32sten Bande dieses Journals gegeben hat. ***Dirichlet*** beweist dort, dafs ein Ausdruck $\boldsymbol{P}$ dann die richtige Form des Potentiales enthält, wenn:

1) $\boldsymbol{P}$ und seine ersten partiellen Differentialquotienten endliche und continuirliche Functionen von ξ, η, ζ innerhalb des ganzen Raumes sind,

2) die Ausdrücke $\xi\boldsymbol{P}$, $\eta\boldsymbol{P}$, $\zeta\boldsymbol{P}$; $\xi^2\frac{\partial P}{\partial\xi}$, $\eta^2\frac{\partial P}{\partial\eta}$, $\zeta^2\frac{\partial P}{\partial\zeta}$ im ganzen Raume endliche Werthe nicht überschreiten,

3) die Gröfsen $\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2}$ im ganzen Raume endlich und eindeutig sind und der Differentialgleichung

$$\triangle \boldsymbol{P} = \frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial\zeta^2} = -4\pi\varkappa$$

genügen, wo für einen inneren Punkt (ξ, η, ζ) $\varkappa = 1$ zu setzen ist, für einen äufseren $\varkappa = 0$.

Zu der dritten Bedingung ist zu bemerken, dafs sie für den hier vorliegenden Fall ausgesprochen ist, nämlich für einen homogenen Körper, dessen Dichtigkeit gleich der Einheit gesetzt ist.

Es soll nun gezeigt werden, dafs der für das Potential gegebene Ausdruck diesen drei Bedingungen genügt.

Zunächst ist klar, dafs die in (3.) und (11.) aufgestellten Formen des Potentiales und seiner ersten Ableitungen die erste Bedingung erfüllen. Denn die aus (8.) und (9.) ersichtliche Bildung von Φ und X zeigt, dafs das Potential und seine ersten Ableitungen auf stetige Weise aus Functionen zusammengesetzt sind, die für alle Werthe der Argumente zwischen $-\infty$ und $+\infty$ stetig bleiben.

Was die zweite Bedingung betrifft, so ist klar, dafs sie erfüllt ist, so lange ξ, η, ζ endlich bleiben. Denn die Gleichungen (3.) und (11.) in Verbindung mit (8.) und (9.) zeigen, dafs alle Glieder, aus denen das Potential und seine ersten Ableitungen zusammengesetzt sind, endlich bleiben, so lange

ξ, η, ζ endliche Werthe haben. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dafs diese Bedingung auch erfüllt ist, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt. Um die grofsen Weitläufigkeiten zu ersparen, welche eine directe Behandlung der Gleichungen (3.) und (11.) für diesen Fall mit sich führt, sollen jetzt die Formen des Potentiales und seiner ersten Ableitungen in zweckdienlicher Weise umgeformt werden.

Da $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ mit α sein Zeichen ändert, so darf für (3.) geschrieben werden:

$$8P = \Sigma \varepsilon \Phi(\xi + \varepsilon a, b + \varepsilon' \eta, c + \varepsilon'' \zeta).$$

Läfst man nun der Abkürzung wegen zunächst die beiden letzten Argumente in Φ weg, so ist klar, dafs die rechts stehende Summe identisch ist, mit der folgenden:

$$\Sigma \varepsilon [\Phi(\xi + \varepsilon a) - \Phi(\xi)],$$

und da nach dem *Taylor*schen Satze:

$$\Phi(\xi + \varepsilon a) - \Phi(\xi) = \varepsilon a \partial_\xi \Phi(\xi + \vartheta \varepsilon a),$$
$$0 < \vartheta < 1,$$

wo $\partial_\xi \Phi$ die erste Ableitung nach ξ bedeutet,

so folgt:

$$8P = a \Sigma \partial_\xi \Phi(\xi + \vartheta \varepsilon a, b + \varepsilon' \eta, c + \varepsilon'' \zeta).$$

Nun ändert aber, wie oben bemerkt worden, $X(\alpha, \beta, \gamma)$ mit β sein Zeichen, also auch $\partial_\xi \Phi$ mit $b + \varepsilon' \eta$; es darf daher, wie oben, für die vorstehende Gleichung geschrieben werden:

$$8P = a \Sigma \varepsilon' \partial_\xi \Phi(\xi + \vartheta \varepsilon a, \eta + \varepsilon' b, c + \varepsilon'' \zeta),$$

oder, indem man wie vorher weiter schliefst:

$$8P = ab \Sigma \partial^2_{\xi,\eta} \Phi(\xi + \vartheta \varepsilon a, \eta + \vartheta' \varepsilon' b, c + \varepsilon'' \zeta),$$

wo $\partial^2_{\xi,\eta}$ die zweite Ableitung nach ξ und η bedeutet, und $0 < \vartheta' < 1$. Endlich ändert auch $\partial^2_{\alpha,\beta} \Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ mit γ sein Zeichen, wie aus (6.) folgt, also erhält man durch Wiederholung desselben Verfahrens:

$$8P = abc \Sigma \partial^3_{\xi,\eta,\zeta} \Phi(\xi + \vartheta \varepsilon a, \eta + \vartheta' \varepsilon' b, \zeta + \vartheta'' \varepsilon'' c),$$

wo $\partial^3_{\xi,\eta,\zeta}$ die dritte Ableitung nach ξ und η und ζ bedeutet und $0 < \vartheta'' < 1$. Hieraus folgt aber nach (10.):

$$(13.) \qquad P = abc \Sigma \frac{1}{R_1},$$

wo

$$R_1^2 = (\xi + \vartheta\varepsilon a)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b)^2 + (\zeta + \vartheta''\varepsilon'' c)^2$$

gesetzt worden, und die Gröfsen ϑ, ϑ', ϑ'' zwischen 0 und 1 liegen.

Zu dieser Gleichung ist zu bemerken, dafs die Gröfsen ϑ, ϑ', ϑ'' eigentlich mit Indices versehen sein müssen, welche anzeigen, dafs sie für die verschiedenen Werthe von ε, ε', ε'' nicht dieselben Werthe besitzen. Diese Unterscheidung ist jedoch weggelassen worden, weil keine andere Eigenschaft der Gröfsen ϑ, ϑ', ϑ'' gebraucht wird, als die, dafs sie zwischen 0 und 1 liegen. Ferner ist ersichtlich, dafs man Ausdrücke für die ersten Ableitungen nach ξ, η, ζ aus (13.) durch Differentiation nach ξ, η, ζ unter der Voraussetzung, dafs ϑ, ϑ', ϑ'' constant sind, ableiten darf. Denn würde man die eigentlichen Ausdrücke für die Ableitungen, so wie sie aus der Gleichung (11.) folgen, in derselben Weise behandeln, wie es mit der Form des Potentiales selbst geschehen ist, wobei man bemerken möge, dafs dies möglich ist, weil $X(\alpha, \beta, \gamma)$ denselben Werth behält, wenn α sein Zeichen ändert, also $X(\xi + \varepsilon a)$ für $X(a + \varepsilon\xi)$ geschrieben werden darf, so würde man gerade auf die Ausdrücke kommen, welche man durch Differentiation unter der Voraussetzung, dafs ϑ, ϑ', ϑ'' constant sind, aus der Gleichung (13.) direct erhält. Natürlich sind dann die Gröfsen ϑ, ϑ', ϑ'' in den Ableitungen mit denen der Gleichung (13.) nicht identisch, aber diese Eigenschaft wird auch nicht angewendet.

Nach diesen Bemerkungen folgt nun aus (13.):

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -abc\Sigma\frac{\xi + \vartheta\varepsilon a}{R_1^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial \eta} = -abc\Sigma\frac{\eta + \vartheta'\varepsilon' b}{R_1^3}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = -abc\Sigma\frac{\zeta + \vartheta''\varepsilon'' c}{R_1^3},$$

und diese Gleichungen in Verbindung mit (13.) zeigen ohne Weiteres, dafs die Ausdrücke ξP, ηP, ζP; $\xi^2\frac{\partial P}{\partial \xi}$, $\eta^2\frac{\partial P}{\partial \eta}$, $\zeta^2\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ immer endlich bleiben, wie viele von den Gröfsen ξ, η, ζ auch unendlich werden, und welche Werthe die Verhältnisse $\eta:\xi$, und $\zeta:\xi$ auch im Unendlichen haben mögen. Der zweiten Bedingung wird daher vollständig genügt.

Auch die dritte Bedingung ist erfüllt. Denn aus der Gleichung (12.) folgt, dafs die Gröfsen $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}$ eindeutig sind, da die in ihnen vorkommenden arctg immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegen, und ferner, dafs diese Werthe überall endlich bleiben, selbst wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt. Es ist daher nur noch zu zeigen, dafs sie der gegebenen partiellen Differentialgleichung $\Delta P = -4\pi\varkappa$ genügen.

Hierzu ist nach (7.)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = -8 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho},$$

also auch

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = -8 \operatorname{arctg} \frac{\gamma\alpha}{\beta\varrho}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} = -8 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\beta}{\gamma\varrho}.$$

Durch Addition dieser Ausdrücke erhält man:

$$(14.) \qquad \Delta \Phi = -4\pi,$$

wenn die Gröfsen α, β, γ positiv sind. Denn die beiden ersten arctg geben addirt $\operatorname{arctg} \frac{\gamma\varrho}{\alpha\beta}$, und dieser mit dem letzten zusammen giebt, wie man sofort sieht, $\frac{1}{2}\pi$.

Ist nun (ξ, η, ζ) ein innerer Punkt, so sind die Argumente sämmtlicher Φ in (3.) positiv und man erhält daher sofort mit Hülfe von (14.)

$$\Delta P = -4\pi.$$

Ist dagegen (ξ, η, ζ) ein äufserer Punkt, so ist mindestens eine der Bedingungen $\xi > a$, $\eta > b$, $\zeta > c$ erfüllt. Sei z. B. $\xi > a$, so darf für (3.) geschrieben werden:

$$8P = \Sigma \varepsilon \Phi(\xi + \varepsilon a, \eta + \varepsilon' b, \zeta + \varepsilon'' c),$$

und da nun in allen Φ das erste Argument jedenfalls positiv ist, so erhält man durch (14.)

$$\Delta P = -\tfrac{1}{2}\pi \Sigma \lambda . \varepsilon,$$

wo λ einen von dem Verhalten der Gröfsen η, ζ, also jedenfalls nur von den Zeichen ε' und ε'' abhängigen Coefficienten bedeutet. Da also in der vorstehenden Gleichung die Summe nach ε verschwindet, so ist

$$\Delta P = 0,$$

und dasselbe tritt ein, wenn man von einer der Bedingungen $\eta > b$, $\zeta > c$ ausgeht, weil dann jedenfalls die Summen nach ε' oder ε'' verschwinden. Es ist daher für jeden äufseren Punkt

$$\Delta P = 0,$$

und damit gezeigt, dafs auch der dritten Bedingung genügt wird.

Hiermit sind also die gegebenen Ausdrücke nach der *Dirichlet*schen Methode vollständig verificirt, und es folgt daher auch auf diese Weise, dafs



(3.) das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums darstellt. — Durch die Kenntnifs des Raumpotentiales wird man nun auch in den Stand gesetzt für alle Lagen von (ξ, η, ζ) das *Flächenpotential* anzugeben. Denn es leuchtet sofort ein, dafs das Potential der Oberfläche eines rechtwinkligen Parallelepipedums mit den Seiten $2a$, $2b$, $2c$ in Beziehung auf einen Punkt (ξ, η, ζ), welches mit $V(a, b, c, \xi, \eta, \zeta)$ bezeichnet werden möge, gegeben ist durch die Gleichung:

$$V = \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{\partial P}{\partial b} + \frac{\partial P}{\partial c},$$

wo P das entsprechende Raumpotential bedeutet. — Ich bemerke endlich noch zum Schlusse, dafs dieselbe Methode auch ausreicht, um das Potential eines *beliebigen* homogenen Parallelepipedums zu finden.

Berlin, im Juni 1860.

Note sur la transformation de *Tschirnhausen*.

(Par M. *A. Cayley*.)

On trouve dans le mémoire de M. ***Hermite*** „Sur quelques théorèmes d'algèbre et la résolution de l'équation du quatrième degré" (Comptes Rendus t. XLVI, p. 961, 1858) un théorème trés-important relatif à la transformation de ***Tschirnhausen***, à l'aide de laquelle une équation $f(x) = 0$ est transformée en une autre du même degré en y par la substitution $y = \varphi x$, où φx désigne une fonction rationnelle. En considérant pour fixer les idées une équation du quatrième degré

$$(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = 0,$$

M. ***Hermite*** donne à l'équation $y = \varphi x$ la forme que voici,

$$y = aT + (ax + 4b)\,T_0 + (ax^2 + 4bx + 6c)\,T_1 + (ax^3 + 4bx^2 + 6cx + 4d)\,T_2$$

et il fait voir que les coefficients de la transformée en y ont la propriété suivante: toute fonction de ces coefficients, laquelle exprimée en fonction de $a, b, c, d, e, T, T_0, T_1, T_2$ ne contient pas T, est un ***invariant***, c. à. d. un invariant des deux fonctions

$$(a, b, c, d, e)(\xi, \eta)^4, \quad (T_0, T_1, T_2)(\eta, -\xi)^2.$$

Cela revient à dire qu'en supposant la valeur de T déterminée de manière à faire évanouir dans l'équation en y le coefficient du second terme (de y^3), les autres coefficients seront des invariants, de sorte que si dans le polynome en y qui est égalé à zéro on considère y comme une constante absolue le polynome tout entier sera un invariant des deux fonctions ci-dessus mentionnées. On trouve sans peine la valeur que doit avoir T, elle est donnée par l'équation

$$0 = aT + 3bT_0 + 3cT_1 + dT_2,$$

ce qui conduit pour y à la valeur

$$y = (ax + b)\,T_0 + (ax^2 + 4bx + 3c)\,T_1 + (ax^3 + 4bx^2 + 6cx + 3d)\,T_2$$

et en même temps la transformée en y aura la propriété dont il s'agit.

Par rapport à la forme de l'expression que l'on vient de trouver pour y il est bon de remarquer que les coefficients numériques qu'on y rencontre, hormis ceux du terme en x^0, ou de $bT_0 + 3cT_1 + 3dT_2$, sont les coefficients de la puissance $(1, 1)^4$, tandis que les coefficients qui ont été désignés comme faisant exception sont ceux de la puissance $(1, 1)^3$. Une remarque pareille

s'applique au cas général. Pour démontrer le théorème énoncé, je représente l'équation qui vient d'être écrite par $y = V$, la transformée en y sera donc

$$(y-V_1)(y-V_2)(y-V_3)(y-V_4) = 0,$$

où V_1, V_2, V_3, V_4 sont ce que devient V lorsqu'on y substitue successivement pour x les quatre racines de l'équation $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = 0$. Or, en considérant y comme une constante, pour que l'expression qui forme la première partie de l'équation que l'on vient d'écrire soit un invariant, les conditions à remplir consistent en ce que cette expression se réduise à zéro au moyen de l'un et l'autre des opérateurs

$$a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d + 4d\partial_e - (\ T_2\partial_{T_1} + 2T_1\partial_{T_0}),$$
$$4b\partial_a + 3c\partial_b + 2d\partial_c + \ e\partial_d - (2T_1\partial_{T_2} + \ T_0\partial_{T_1}).$$

Ces conditions seront satisfaites si chacun des facteurs $y - V_1$ etc. est doué de cette même propriété, c. à. d. si $y - V$ ou plus simplement, si V en y faisant x égal à l'une des racines de l'équation en x se réduit à zéro au moyen de l'un et l'autre des deux opérateurs ci-dessus écrits. Je considère le premier des deux opérateurs et pour abréger je le désigne par

$$\varDelta - (T_2\partial_{T_1} + 2T_1\partial_{T_0}).$$

Pour avoir $\varDelta V$, il faut d'abord former la valeur de $\varDelta x$. On l'obtient en opérant avec $\varDelta$ sur l'équation $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = 0$, ce qui donne

$$(a, b, c, d)(x, 1)^3\varDelta x + (a, b, c, d)(x, 1)^3 = 0, \quad \text{ou} \quad \varDelta x = -1.$$

La partie de $\varDelta V$ qui dépend de la variation de x est par conséquent

$$-aT_0 + (-2ax - 4b)\,T_1 + (-3ax^2 - 8bx - 6c)\,T_2.$$

Pour l'autre partie de $\varDelta V$ on trouve aisément

$$aT_0 + (4ax + 6b)\,T_1 + (4ax^2 + 12bx + 9c)\,T_2$$

et de là en ajoutant

$$\varDelta V = 2(ax + b)\,T_1 + (ax^2 + 4bx + 3c)\,T_2$$

ce qui est precisément égal à

$$(T_2\partial_{T_1} + 2T_1\partial_{T_0})\,V.$$

Donc V se réduit à zéro par l'opérateur

$$\varDelta - (T_2\partial_{T_1} + 2T_1\partial_{T_0}).$$

De même en représentant le second opérateur par

$$\nabla - (2T_1\partial_{T_2} + T_0\partial_{T_1})$$

on trouve d'abord

$$(a, b, c, d)(x, 1)^3 \nabla x + x.(b, c, d, e)(x, 1)^3 = 0,$$

mais en ayant égard à l'équation $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = 0$ la valeur de ∇x se réduit à $\nabla x = x^2$. La partie de ∇V due à la variation de x est par conséquent

$$ax^2 T_0 + (2ax^3 + 4bx^2) T_1 + (3ax^4 + 8bx^3 + 6cx^2) T_2.$$

L'autre partie de ∇V est

$$(4bx + 3c) T_0 + (4bx^2 + 12cx + 6d) T_1 + (4bx^3 + 12cx^2 + 12dx + 3e) T_2.$$

En les ajoutant, le coefficient de T_2 s'évanouit en vertu de l'équation en x, et l'on trouve

$$\nabla V = (ax^2 + 4bx + 3c) T_0 + 2(ax^3 + 4bx^2 + 6cx + 3d) T_1,$$

ce qui est précisément égal à

$$(2T_1 \partial_{T_2} + T_0 \partial_{T_1}) V.$$

V se réduit donc à zéro au moyen de l'opérateur

$$\nabla - (2T_1 \partial_{T_2} + T_0 \partial_{T_1}),$$

ce qui achève la démonstration dont il s'agissait. Il va sans dire que la démonstration serait conduite d'une manière semblable pour une équation de degré quelconque. Pour avoir l'exemple le plus simple, je prends les équations

$$(a, b, c, d)(x, 1)^3 = 0,$$
$$y = (ax + b) T_0 + (ax^2 + 3bx + 2c) T_1,$$

et pour effectuer l'élimination j'écris

$$yx = (ax^2 + bx) T_0 + (-cx - d) T_1,$$
$$yx^2 = (-2bx^2 - 3cx - d) T_0 + (-cx^2 - dx) T_1.$$

Maintenant on a les trois équations

$$\begin{aligned}
0 &= bT_0 + 2cT_1 - y + x(aT_0 + 3bT_1) + x^2.aT_1,\\
0 &= -dT_1 + x(bT_0 - cT_1 - y) + x^2.aT_0,\\
0 &= -dT_0 + x(-3cT_0 - dT_1) + x^2(-2bT_0 - cT_1 - y),
\end{aligned}$$

donc l'équation en y est

$$\begin{vmatrix} y - bT_0 - 2cT_1, & -aT_0 - 3bT_1, & -aT_1 \\ dT_1, & y - bT_0 + cT_1, & -aT_0 \\ dT_0, & 3cT_0 + dT_1, & y + 2bT_0 + cT_1 \end{vmatrix} = 0.$$

En ordonnant ce déterminant suivant les puissances de y, les coefficients de

y^3, y^2, y, y^0 deviennent des formes binaires en T_0, T_1, des ordres 0, 1, 2, 3. En calculant les valeurs de ces quatre coefficients on les trouve respectivement

$= 1$

$= 0$

$= 3(ac-b^2, ad-bc, bd-c^2)(T_0, T_1)^2$

$= (a^2d-3abc+2b^3, 3abd-6ac^2+3b^2c, -3acd+6b^2d-3bc^2, -ad^2+3bcd-2c^3)(T_0, T_1)^3$,

c'est à dire que l'équation en y est celle-ci:

$$y^3+3y(ac-b^2, ad-bc, bd-c^2)(T_0, T_1)^2$$
$$+(a^2d-3abc+2b^3, 3abd-6ac^2+3b^2c, -3acd+6b^2d-3bc^2, -ad^2+3bcd-2c^3)(T_0, T_1)^3=0$$

équation qui remplit en effet la condition ci-dessus mentionnée, d'avoir pour coefficients des invariants des deux formes:

$$(a, b, c, d)(\xi, \eta)^3, \qquad (T_0, T_1)(\eta, -\xi).$$

Dans le cas particulier dont il s'agit et où la fonction $(T_0, T_1)(\eta, -\xi)$ est linéaire, on peut même dire que les coefficients sont des covariants de la seule fonction $(a, b, c, d)(T_0, T_1)^3$ en y considérant T_0, T_1 comme les variables.

J'ai cru qu'il y avait de l'intérêt de donner cette vérification. D'ailleurs je remarque qu'au moyen du théorème même on aurait pu trouver de suite l'équation en y, en écrivant d'abord $T_1 = 0$, ce qui donne le système

$$(a, b, c, d)(x, 1)^3 = 0,$$
$$y = (ax+b)T_0$$

et de là

$$\frac{1}{a}(a, b, c, d)(y-bT_0, aT_0)^3 = 0$$

ou enfin

$$y^3+3y(b^2-ac)T_0^2+(a^2d-3abc+2b^3)T_1^3 = 0.$$

Les valeurs des coefficients peuvent être complétées eu égard à ce qu'ils doivent être des invariants de $(a, b, c, d)(\xi, \eta)^3$, $(T_0, T_1)(\eta, -\xi)$ (ou, comme on vient de le dire, des covariants de $(a, b, c, d)(T_0, T_1)^3$). Mais ce n'est que dans le cas particulier, où les coefficients T_0, T_1 sont au nombre de deux, que l'on peut réduire la seconde équation à une équation linéaire.

Londres, 18 Avril 1860.

Deuxième note sur la transformation de *Tschirnhausen.*

(Par M. *A. Cayley.*)

A la fin de ma première note sur ce sujet j'ai appliqué la transformation de *Tschirnhausen* à l'équation du troisième degré mise sous la forme

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=(a,b,c,d)(x,1)^3=0.$$

En y substituant $\frac{1}{3}b$, $\frac{1}{3}c$ au lieu de b, c, cette équation se change en

$$ax^3+bx^2+cx+d=(a,b,c,d\underset{\smile}{)(}x,1)^3=0$$

et en même temps le résultat obtenu dans ma première note s'énonce de la manière suivante:

En calculant pour l'équation

$$(a,b,c,d\underset{\smile}{)(}x,1)^3=0$$

la transformée en

$$y=(ax+\tfrac{1}{3}b)T_0+(ax^2+bx+\tfrac{2}{3}c)T_1$$

on obtient

$$\left.\begin{array}{l} y^3 \\ +\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{l} T_0^2(3ac-b^2) \\ +T_0T_1(9ad-bc) \\ +T_1^2(3bd-c^2) \end{array}\right\}y \\ +\frac{1}{27}\left\{\begin{array}{l} T_0^3(27a^2d-9abc+2b^3) \\ +T_0^2T_1(27abd-18ac^2+3b^2c) \\ +T_0T_1^2(-27acd+18b^2d-3bc^2) \\ +T_1^3(-27ad^2+9bcd-2c^3) \end{array}\right\} \end{array}\right\}=0.$$

Je vais me servir de cette formule, pour en déduire l'équation qui d'une manière analogue est la transformée de l'équation du quatrième ordre

$$(a,b,c,d,e)(x,1)^4=0.$$

J'écris d'abord

$$(a,b,c,d,e\underset{\smile}{)(}x,1)^4=0,$$

$$y=(ax+\tfrac{1}{4}b)T_0+(ax^2+bx+\tfrac{2}{4}c)T_1+(ax^3+bx^2+cx+\tfrac{3}{4}d)T_2,$$

et je remarque qu'en faisant $e=0$, le système proposé se partage en deux,

dont le premier est:

$$x = 0,$$
$$y = \tfrac{1}{4}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2),$$

et le second:

$$(a, b, c, d)(x, 1)^3 = 0,$$
$$y = (ax + \tfrac{1}{4}b)T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{1}{2}c)T_1 - \tfrac{1}{4}dT_2;$$

ou, ce qui est la même chose:

$$(a, b, c, d)(x, 1)^3 = 0,$$
$$y + \tfrac{1}{12}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2) = (ax + \tfrac{1}{3}b)T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{2}{3}c)T_1.$$

Une circonstance analogue a lieu dans l'équation en y, résultat de l'élimination du système proposé. Pour $e = 0$ son premier membre se résout de même en deux facteurs qui égalés à zéro sont les résultats de l'élimination du premier et du second système ci-dessus écrits. Le premier de ces deux facteurs est donc

$$y - \tfrac{1}{4}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2);$$

et le second (en vertu de la formule donnée antérieurement)

$$\{y + \tfrac{1}{12}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2)\}^3$$
$$+ \tfrac{1}{3}[(3ac - b^2)T_0^2 + \text{etc.}]\{y + \tfrac{1}{12}(bT_0 + 2cT_1 + 3dT_2)\}$$
$$+ \tfrac{1}{27}[(27a^2d - 9abc + 2b^3)T_0^3 + \text{etc.}].$$

Donc en multipliant les deux facteurs, et en égalant à zéro leur produit, on a la transformée en y de la forme $(a, b, c, d, 0)(x, 1)^4$. Or dans le cas général, où e est différent de zéro, les coefficients de la transformée en y sont des invariants des deux formes

$$(a, b, c, d, e)(\xi, \eta)^4, \quad (T_0, T_1, T_2)(\eta, -\xi)^2.$$

Cette propriété permet de déduire leurs valeurs générales des valeurs particulières qu'ils ont pour $e = 0$. Je formerai de cette manière la transformée en y pour la forme $(a, b, c, d, 0)(x, 1)^4$, je passerai de là à la forme $(a, b, c, d, 0)(x, 1)^4$ (ce qui se fait en écrivant $4b$, $6c$, $4d$ au lieu de b, c, d) et enfin je complèterai les valeurs des coefficients en y introduisant e au moyen de la propriété que doivent posséder les coefficients d'être des invariants des deux formes

$$(a, b, c, d, e)(\xi, \eta)^4, \quad (T_0, T_1, T_2)(\eta, -\xi)^2.$$

On obtient d'abord l'équation en y sous la forme

$$(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})(y, 1)^4 = 0,$$

où

$$
\begin{aligned}
8\mathfrak{C} = \quad & T_0^2(8ac-3b^2) \\
+ & T_0T_1(24ad-4bc) \\
+ & T_1^2(8bd-4c^2) \\
+ & T_0T_2(-2bd) \\
+ & T_1T_2(-4cd) \\
+ & T_2^2(-3d^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8\mathfrak{D} = \quad & T_0^3(8a^2d-4abc+1b^3) \\
+ & T_0^2T_1(4abd-8ac^2+2b^2c) \\
+ & T_0T_1^2(-16acd+4b^2d) \\
+ & T_1^3(-8ad^2) \\
+ & T_0^2T_2(-4acd+1b^2d) \\
+ & T_0T_1T_2(-12ad^2) \\
+ & T_1^2T_2(-4bd^2) \\
+ & T_0T_2^2(-1bd^2) \\
+ & T_1T_2^2(-2cd^2) \\
+ & T_2^3(-1d^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
256\mathfrak{E} = \quad & T_0^4(64a^2bd+16ab^2c-3b^4) \\
+ & T_0^3T_1(-128a^2cd-80ab^2d+64abc^2-8b^3c) \\
+ & T_0^2T_1^2(-128abcd+64ac^3-48b^3d+8b^2c^2) \\
+ & T_0T_1^3(64abd^2+64ac^2d-128b^2cd+32bc^3) \\
+ & T_1^4(128acd^2-64bc^2d+16c^4) \\
+ & T_0^3T_2(-192a^2d^2+32abcd-4b^3d) \\
+ & T_0^2T_1T_2(-288abd^2+64ac^2d+8b^2cd) \\
+ & T_0T_1^2T_2(-160b^2d^2+48bc^2d) \\
+ & T_1^3T_2(+192ad^3-128bcd^2+32c^3d) \\
+ & T_0^2T_2^2(-48acd^2+14b^2d^2) \\
+ & T_0T_1T_2^2(-144ad^3+8bcd^2) \\
+ & T_1^2T_2^2(-48bd^3+8c^2d^2) \\
+ & T_0T_2^3(-4bd^3) \\
+ & T_1T_2^3(-8cd^3) \\
+ & T_2^4(-3d^4)
\end{aligned}
$$

Ce calcul achevé et substituant la forme $(a, b, c, d, 0)(\xi, \eta)^4$ au lieu de $(a, b, c, d, 0)(\xi, \eta)^4$ (ou $4b$, $6c$, $4d$ au lieu de b, c, d) on obtient tous les

termes de l'équation cherchée, hormis ceux qui contiennent e: et ces derniers s'obtiennent au moyen de ce que les coefficients des différentes puissances de y se réduisent à zéro par l'opérateur

$$a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d + 4d\partial_e - T_2\partial_{T_1} - 2T_1\partial_{T_0}.$$

Cela ne présente pas de difficulté, je supprime donc les calculs intermédiaires et je donne le résultat final que voici: les équations

$$(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = 0,$$

$$y = (ax+b)T_0 + (ax^2+4bx+3c)T_1 + (ax^3+4bx^2+6cx+3d)T_2$$

conduisent à la transformée:

$$(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})(y, 1)^4 = 0,$$

où l'on a

	T_0^2	T_0T_1	T_0T_2	T_1^2	T_1T_2	T_2^2
$\mathfrak{C} = 2$	$+3ac$ $-3b^2$	$+6ad$ $-6bc$	$+2ae$ $-2bd$	$+1ae$ $+8bd$ $-9c^2$	$+6be$ $-6cd$	$+3ce$ $-3d^2$

	T_0^3	$T_0^2T_1$	$T_0^2T_2$	$T_0T_1^2$	$T_0T_1T_2$	T_1^3	$T_0T_2^2$	$T_1^2T_2$	$T_1T_2^2$	T_2^3
$\mathfrak{D} = 4$	$+1a^2d$ $-3abc$ $+2b^3$	$+1a^2e$ $+2abd$ $-9ac^2$ $+6b^2c$	$+1abe$ $-3acd$ $+2b^2d$	$+4abe$ $-12acd$ $+8b^2d$	$-6ad^2$ $+6b^2e$	$-4ad^2$ $+4b^2e$	$-1ade$ $+3bce$ $-2bd^2$	$-4ade$ $+12bce$ $-8bd^2$	$-1ae^2$ $-2bde$ $+9c^2e$ $-6cd^2$	$-1be^2$ $+3cde$ $-2d^3$

$\mathfrak{E} =$

T_0^4	$T_0^3T_1$	$T_0^3T_2$	$T_0^2T_1^2$	$T_0^2T_1T_2$	$T_0T_1^3$	$T_0^2T_2^2$	$T_0T_1^2T_2$
$+1a^3e$ $-4a^2bd$ $+6ab^2c$ $-3b^4$	$+8a^2be$ $-12a^2cd$ $-20ab^2d$ $+36abc^2$ $-12b^3c$	$+12a^2ce$ $-12a^2d^2$ $-8ab^2e$ $+12abcd$ $+4b^3d$	$-6a^2ce$ $+30ab^2e$ $-48abcd$ $+54ac^3$ $-48b^3d$ $+18b^2c^2$	$+60abce$ $-72abd^2$ $+36ac^2d$ $-36b^3e$ $+12b^2cd$	$-4a^2de$ $-12abce$ $+16abd^2$ $+36ac^2d$ $+48b^3e$ $-192b^2cd$ $+108bc^3$	$+2a^2e^2$ $-16abde$ $+36ac^2e$ $-18acd^2$ $-18b^2ce$ $+14b^2d^2$	$-4a^2e^2$ $+20abde$ $+36ac^2e$ $-160b^2d^2$ $+108bc^2d$

T_1^4	$T_0T_1T_2^2$	$T_1^3T_2$	$T_0T_2^3$	$T_1^2T_2^2$	$T_1T_2^3$	T_2^4
$+1a^2e^2$ $-16abde$ $-18ac^2e$ $+48acd^2$ $+48b^2ce$ $-144bc^2d$ $+81c^4$	$+60acde$ $-36ad^3$ $-72b^2de$ $+36bc^2e$ $+12bcd^2$	$-4abe^2$ $-12acde$ $+48ad^3$ $+16b^2de$ $+36bc^2e$ $-192bcd^2$ $+108c^3d$	$+12ace^2$ $-8ad^2e$ $-12b^2e^2$ $+12bcde$ $-4bd^3$	$-6ace^2$ $+30ad^2e$ $-48bcde$ $-48bd^3$ $+54c^3e$ $+18c^2d^2$	$+8ade^2$ $-12bce^2$ $-20bd^2c$ $+36c^2de$ $-12cd^3$	$+1ae^3$ $-4bde^2$ $+6cd^2e$ $-3d^4$

J'écris

$$U' = aT_0^2 + 4bT_0T_1 + c(2T_0T_2 + 4T_1^2) + 4dT_1T_2 + eT_2^2,$$

$$H' = (ac-b^2)T_0^2 + 2(ad-bc)T_0T_1 + (ae-2bd+c^2)T_0T_2 + 4(bd-c^2)T_1^2 + 2(be-cd)T_1T_2 + (ce-d^2)T_2^2$$

et je représente par $4\Phi'$ la valeur qui vient d'être trouvée pour $\mathfrak{D}$. Ces expressions U', H', Φ' sont des invariants des deux formes $(a, b, c, d, e)(\xi, \eta)^4$, $(T_0, T_1, T_2)(\eta, -\xi)^2$, on a de plus les invariants

$$ae - 4bd + 3c^2, \quad ace - ad^2 - b^2e + 2bcd - c^3,$$

que je représente comme à l'ordinaire par I, J et l'invariant $T_0T_2 - T_1^2$ que je représente par Θ'. Cela posé on a

$$\mathfrak{C} = 6H' - 2I\Theta',$$

$$\mathfrak{D} = 4\Phi',$$

$$\mathfrak{E} = IU'^2 - 3H'^2 + I^2\Theta'^2 + 12J\Theta'U' + 2I\Theta'H'.$$

La dernière de ces équations peut être vérifiée aisément, pour cela on a seulement besoin de remarquer qu'en posant $a = e = 1$, $b = d = 0$, $c = \theta$, elle devient

$$\begin{aligned}
&(1+3\theta^2)(T_0^2 + \theta(2T_0T_2 + 4T_1^2) + T_2^2)^2 \\
&- 3(\theta T_0^2 + (1+\theta^2)T_0T_2 - 4\theta^2T_1^2 + \theta T_2^2)^2 \\
&+ (1+3\theta^2)^2(T_0T_2 - T_1^2)^2 \\
&+ 12(\theta - \theta^3)(T_0T_2 - T_1^2)(T_0^2 + \theta(2T_0T_2 + 4T_1^2) + T_2^2) \\
&+ 2(1+3\theta^2)(T_0T_2 - T_1^2)(\theta T_0^2 + (1+\theta^2)T_0T_2 - 4\theta^2T_1^2 + \theta T_2^2) \\
= \;& T_0^4 \\
&+ T_0^3T_2(12\theta) \\
&+ T_0^2T_1^2(-6\theta + 54\theta^3) \\
&+ T_0^2T_2^2(2 + 36\theta^2) \\
&+ T_0T_2T_1^2(-4 + 36\theta^2) \\
&+ T_1^4(1 - 18\theta^2 + 81\theta^4) \\
&+ T_1^2T_2^2(-6\theta + 54\theta^3) \\
&+ T_0T_2^3(12\theta) \\
&+ T_2^4
\end{aligned}$$

équation qui est identique. L'expression de l'invariant I (quadrinvariant) de la fonction $(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})(y, 1)^4$ est $\mathfrak{E} + 3(\frac{1}{6}\mathfrak{C})^2$ ou $\mathfrak{E} + 3(H' - \frac{1}{3}I\Theta')^2$

c'est à dire

$$\begin{aligned} IU'^2 - 3H'^2 + I^2\Theta'^2 + 12J\Theta'U' + 2I\Theta'H' \\ + 3H'^2 + \tfrac{1}{3}I^2\Theta'^2 \qquad\qquad - 2I\Theta'H' \end{aligned}$$

ou enfin

$$IU'^2 + \tfrac{4}{3}I^2\Theta'^2 + 12J\Theta'U'$$

ce qui est égal à

$$\frac{1}{I}[(IU' + 6J\Theta')^2 + \tfrac{4}{3}(I^3 - 27J^2)\Theta'^2].$$

La condition à remplir pour que cet invariant se réduise à zéro peut donc être présentée sous la forme

$$IU' + [6J \pm 2\sqrt{-\tfrac{1}{3}(I^3 - 27J^2)}]\,\Theta' = 0$$

ce qui s'accorde avec un résultat trouvé par M. *Hermite.*

Il doit y avoir, ce me semble, une équation identique de la forme

$$JU'^2 - IU'^2H' + 4H'^3 + M\Theta' = -\Phi'^2$$

qui servirait à exprimer le carré de Φ' au moyen des autres invariants U', H', Θ', I, J, mais en supposant que cette équation existe, la forme du facteur M, que je n'ai pas encore cherchée, reste à déterminer; l'invariant J (cubinvariant) de la forme $(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})(y, 1)^4$ contient Φ'^2, et il faudrait employer l'identité dont on vient de parler pour réduire à sa forme la plus simple cet invariant; dans l'état actuel de la question je ne m'occupe donc pas de l'expression du cubinvariant de $(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})(y, 1)^4$.

Pour passer au cas d'une équation du cinquième ordre, on devra faire usage de la formule qui se rapporte à la forme $(a, b, c, d, e)(x, 1)^4$. En faisant la substitution nécessaire on arrive à ce résultat que pour l'équation

$$(a, b, c, d, e)(x, 1)^4 = 0$$

la transformée en

$$y = (ax + \tfrac{1}{4}b)\,T_0 + (ax^2 + bx + \tfrac{1}{2}c)\,T_1 + (ax^3 + bx^2 + cx + \tfrac{1}{4}d)\,T_2$$

est la suivante

$$(1, 0, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E})(y, 1)^4 = 0,$$

où

	T_0^2	T_0T_1	T_0T_2	T_1^2	T_1T_2	T_2^2
$\mathfrak{C} = \frac{1}{8}$	$+8ac$	$+24ad$	$+32ae$	$+16ae$	$+24be$	$+8ce$
	$-3b^2$	$-4bc$	$-2bd$	$+8bd$	$-4cd$	$-3d^2$
				$-4c^2$		

$\mathfrak{D} =$

	T_0^3	$T_0^2T_1$	$T_0^2T_2$	$T_0T_1^2$	$T_0T_1T_2$	T_1^3	$T_0T_2^2$	$T_1^2T_2$	$T_1T_2^2$	T_2^3
$\frac{1}{8}$	$+8a^2d$	$+32a^2c$	$+8abe$	$+32abe$	$-12ad^2$	$-8ad^2$	$-8ade$	$-32ade$	$-32ae^2$	$-8be^2$
	$-4abc$	$+4abd$	$-4acd$	$-16acd$	$+12b^2c$	$+8b^2c$	$+4bce$	$+16bce$	$-4bde$	$+4cde$
	$+1b^3$	$-8ac^2$	$+1b^2d$	$+4b^2d$			$-1bd^2$	$-4bd^2$	$+8c^2e$	$-1d^3$
		$+2b^2c$							$-2cd^2$	

$\mathfrak{E} =$

	T_0^4	$T_0^3T_1$	$T_0^3T_2$	$T_0^2T_1^2$	$T_0^2T_1T_2$	$T_0T_1^3$	$T_0^2T_2^2$	$T_0^2T_1T_2$
$\frac{1}{256}$	$+256a^3e$	$+512a^2be$	$+512a^2ce$	$-256a^2ce$	$+640abce$	$-256a^2de$	$+512a^2e^2$	$-1024a^2e^2$
	$-64a^2bd$	$-128a^2cd$	$-192a^2d^2$	$+480ab^2e$	$-288abd^2$	$-128abce$	$-256abde$	$+320abde$
	$+16ab^2c$	$-80ab^2d$	$-128ab^2e$	$-128abcd$	$+64ac^2d$	$+64abd^2$	$+256ac^2e$	$+256ac^2e$
	$-3b^4$	$+64abc^2$	$+32abcd$	$+64ac^3$	$-144b^3e$	$+64ac^2d$	$-48acd^2$	$-160b^2d^2$
		$-8b^3c$	$-4b^3d$	$-48b^3d$	$+8b^2cd$	$+192b^3e$	$+48b^2ce$	$+48bc^2d$
				$+8b^2c^2$		$-128b^2cd$	$+14b^2d^2$	
						$+32bc^3$		

T_1^4	$T_0T_1T_2^2$	$T_1^3T_2$	$T_0T_2^3$	$T_1^2T_2^2$	$T_1T_2^3$	T_2^4
$+256a^2e^2$	$+640acde$	$-256abe^2$	$+512ace^2$	$-256ace^2$	$+512ade^2$	$+256ae^3$
$-256abde$	$-144ad^3$	$-128acde$	$-128ad^2e$	$+480ad^2e$	$-128bce^2$	$-64bde^2$
$-128ac^2e$	$-288b^2de$	$+192ad^3$	$-192b^2c^2$	$-128bcde$	$-80bd^2e$	$+16cd^2e$
$+128acd^2$	$+64bc^2e$	$+64b^2de$	$+32bcde$	$-48bd^3$	$+64c^2de$	$-3d^4$
$+128b^2ce$	$+8bcd^2$	$+64bc^2e$	$-4bd^3$	$+64c^3e$	$-8cd^3$	
$-64bc^2d$		$-128bcd^2$		$+8c^2d^2$		
$+16c^4$		$+32c^3d$				

En m'appuyant sur ce résultat j'espère être à même de trouver la formule pour l'équation du cinquième ordre.

Londres, 11 Mai 1860.

Ueber Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate.

(Von *C. W. Borchardt.*)

Indem ich in einer Abhandlung, welche in den Schriften der hiesigen Academie erscheint, eine Interpolationsformel für eine Art symmetrischer Functionen aufstellte und dieselbe auf verschiedene Probleme der Algebra anwandte, unter anderen auf die *Tschebischef*sche Aufgabe, eine ganze Function gegebener Ordnung nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen, wenn eine gröfsere Anzahl von Werthen derselben gegeben ist, als sie nach ihrer Ordnung anzunehmen fähig ist, — gelangte ich aufser den von Herrn *Tschebischef* selbst gegebenen Formen für die Lösung dieser Aufgabe zu einigen anderen, von welchen die eine, die das Ergebnifs in combinatorischer Gestalt liefert, schon um deswillen bemerkenswerth ist, weil sie, ohne irgend eine Rechnung zu erfordern, sich als blofse Folgerung aus der allgemeinen Regel erweist, die *Jacobi* im 22sten Bande dieses Journals für die Bestimmung nach der Methode der kleinsten Quadrate gegeben hat. *Jacobi* stellt sich nämlich die Frage, wie sich der Werth, den die Methode der kleinsten Quadrate zur Lösung eines überzähligen *) Systems linearer Gleichungen für eine einzelne Unbekannte liefert, aus allen den Werthen zusammensetzt, die man für dieselbe Unbekannte erhält, wenn man aus dem gegebenen überzähligen System auf alle Arten ein vollzähliges herausgreift. Er findet, dafs wenn man für jedes vollzählige System die Determinante bildet und ihr Quadrat als das Gewicht des aus diesem System hervorgehenden Werths betrachtet, das unter

---

*) Es ist kaum nöthig besonders zu sagen, dafs ein System linearer Gleichungen (die hier immer als unabhängig von einander vorausgesetzt werden) ein überzähliges genannt wird, wenn die Anzahl der Gleichungen gröfser ist als die der Unbekannten, so dafs man ihnen nicht allen gleichzeitig genügen kann, dagegen ein vollzähliges, wenn beide Anzahlen gleich sind, so dafs man ihnen und zwar nur auf eine Weise genügen kann.



dieser Hypothese genommene Mittel *) aus allen Werthen derjenige ist, welchen die Methode der kleinsten Quadrate liefert. Diese *Jacobi*sche Regel ist natürlich nicht blofs auf jede einzelne Unbekannte anwendbar, sondern ebensowohl auf jeden aus den Unbekannten linear zusammengesetzten Ausdruck.

Die *Tschebischef*sche Aufgabe ist ein besonderer Fall der von *Jacobi* betrachteten allgemeinen, nämlich derjenige, wo das System linearer Gleichungen das folgende ist:

$$\theta\alpha_r \mathfrak{F}\alpha_r = \theta\alpha_r A_r.$$

Hier hat man dem Index r die Werthe $1, 2, \ldots n$ zu geben, $\mathfrak{F}x$ ist die unbekannte ganze Function m^{ten} Grades, wo $m < n-1$, A_r der gegebene Werth, den sie für $x = \alpha_r$ annehmen soll und $\theta\alpha_r$ das Maafs der Genauigkeit der Gleichung $\mathfrak{F}\alpha_r = A_r$, so dafs nach Multiplication mit $\theta\alpha_r$ diese Gleichung für $r = 1, 2, \ldots n$ ein System von Gleichungen giebt, die alle gleich genau sind (eine Annahme, die *Jacobi* bei Aufstellung seiner Regel gemacht hat). Die Unbekannten dieses überzähligen Systems sind die Coefficienten von $\mathfrak{F}x$, und $\mathfrak{F}x$ selbst ist eine lineare Function derselben, also nach der *Jacobi*schen Regel bestimmbar. Wählt man aus dem gegebenen überzähligen System irgend ein vollzähliges, d. h. von $m+1$ Gleichungen aus, z. B. die Gleichungen, welche den Werthen $1, 2, \ldots m+1$ des Index r entsprechen, so ist die Determinante aus diesem vollzähligen linearen System bekanntlich

$$\theta\alpha_1 \theta\alpha_2 \ldots \theta\alpha_{m+1} \varDelta(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}),$$

wo $\varDelta$ das alternirende Differenzenproduct der Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m+1}$ bezeichnet. Das Quadrat dieses Ausdrucks ist also das Gewicht des aus dem ausgewählten vollzähligen System hervorgehenden Werthes von $\mathfrak{F}x$, d. h. des Werthes

$$A_1 \frac{x-\alpha_2 \ldots x-\alpha_{m+1}}{\alpha_1-\alpha_2 \ldots \alpha_1-\alpha_{m+1}} + \cdots + A_{m+1} \frac{x-\alpha_1 \ldots\ldots x-\alpha_m}{\alpha_{m+1}-\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}-\alpha_m},$$

nach der *Jacobi*schen Regel ergiebt sich also für $\mathfrak{F}x$ der nach der Methode

*) Sind $g_1, g_2, g_3, \ldots$ die Gewichte der Werthe $u_1, u_2, u_3, \ldots$ von u, so ist das nach dieser Hypothese genommene Mittel

$$= \frac{g_1 u_1 + g_2 u_2 + g_3 u_3 + \cdots}{g_1 + g_2 + g_3 + \cdots}.$$



der kleinsten Quadrate bestimmte Werth in combinatorischer Form:

$$\mathfrak{F}x = \frac{\mathrm{S}\{\theta\alpha_1\ldots\theta\alpha_{m+1}\varDelta(\alpha_1\ldots\alpha_{m+1})\}^2\left(A_1\frac{x-\alpha_2\ldots x-\alpha_{m+1}}{\alpha_1-\alpha_2\ldots\alpha_1-\alpha_{m+1}}+\cdots+A_{m+1}\frac{x-\alpha_1\ldots\ldots x-\alpha_m}{\alpha_{m+1}-\alpha_1\ldots\alpha_{m+1}-\alpha_m}\right)}{\mathrm{S}\{\theta\alpha_1\ldots\theta\alpha_{m+1}\varDelta(\alpha_1\ldots\alpha_{m+1})\}^2}.$$

wo die Summen S über alle Combinationen zu $m+1$ der Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ auszudehnen sind.

Dies Resultat ist natürlich nur formell von dem *Tschebischef*schen verschieden.

Berlin, im September 1860.

Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Carlsruhe.)

In zwei früheren Aufsätzen (dieses Journal Bd. 58, p. 93 und p. 229) habe ich von einer Eliminationsmethode Gebrauch gemacht, welche sich auf eine gewisse Gattung von Problemen allgemein anwenden läfst, und welche, aufser dem Vorzug der Symmetrie in Bezug auf die homogenen Veränderlichen, auch noch den andern hat, gerade auf diejenigen Formen zu führen, welche in der analytischen Geometrie von Bedeutung sind. Diese Methode ist immer anwendbar, sobald von den m vorgelegten Gleichungen eine vom zweiten, $m-2$ vom ersten Grade sind, während die letzte von einem beliebig hohen Grade sein kann. Ich werde die Methode zunächst in dieser allgemeinen Form auseinandersetzen, sodann aber dieselbe auf einige geometrische Probleme anwenden, welche bisher nicht behandelt worden sind.

§. 1.

Eliminationsproblem.

Es sei $\varphi(x_1, x_2, \dots x_m) = 0$ eine homogene Gleichung des n^{ten} Grades; ferner

$$(1.)\qquad f = u_{11}x_1^2 + 2u_{12}x_1x_2 + \cdots = 0$$

eine Gleichung des zweiten Grades. Aus diesen Gleichungen und den $m-2$ linearen Beziehungen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \alpha^{(1)} = \alpha_1^{(1)}x_1 + \alpha_2^{(1)}x_2 + \cdots + \alpha_m^{(1)}x_m = 0, \\ \alpha^{(2)} = \alpha_1^{(2)}x_1 + \alpha_2^{(2)}x_2 + \cdots + \alpha_m^{(2)}x_m = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^{(m-2)} = \alpha_1^{(m-2)}x_1 + \alpha_2^{(m-2)}x_2 + \cdots + \alpha_m^{(m-2)}x_m = 0 \end{cases}$$

sollen die Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_m$ eliminirt werden.

Zu diesem Zwecke bemerke ich zunächst, dafs man immer, und zwar auf unendlich viel verschiedene Arten, solche lineare Ausdrücke $\beta^{(1)}, \beta^{(2)}, \dots \beta^{(m-2)}$

bestimmen kann, dafs die Summe

$$f+\beta^{(1)}\alpha^{(1)}+\beta^{(2)}\alpha^{(2)}+\cdots+\beta^{(m-2)}\alpha^{(m-2)}$$

identisch in zwei lineare Factoren $p.q$ zerfällt, wo

$$p = p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_mx_m,$$
$$q = q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_mx_m.$$

Aus der identischen Gleichung

$$(3.)\qquad f+\sum_h \beta^{(h)}\alpha^{(h)} = pq$$

folgen dann die Relationen

$$(4.)\qquad 2u_{ik}+\sum_h(\beta_i^{(h)}\alpha_k^{(h)}+\alpha_i^{(h)}\beta_k^{(h)}) = p_iq_k+p_kq_i.$$

Statt der Gleichung $f=0$ in Verbindung mit den Gleichungen (2.) kann man sich nun entweder der Gleichung $p=0$ oder der Gleichung $q=0$ bedienen. Bezeichnet man dann mit P, Q die beiden Determinanten

$$(5.)\qquad \begin{cases} P = \Sigma\pm z_1p_2\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)}\dots\alpha_m^{(m-2)}, \\ Q = \Sigma\pm z_1q_2\alpha_3^{(1)}\alpha_4^{(2)}\dots\alpha_m^{(m-2)}, \end{cases}$$

so kann man die Werthe der x, welche zugleich der Gleichung $f=0$ und den Gleichungen (2.) genügen, entweder durch

$$(6.)\qquad x_i' = \frac{\partial P}{\partial z_i}\quad \text{oder}\quad x_i'' = \frac{\partial Q}{\partial z_i}$$

darstellen.

Eines dieser Werthsysteme mufs auch der Gleichung $\varphi=0$ genügen. Ich setze zu dem Ende diese in die symbolische Form

$$(7.)\qquad \varphi = (a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m)^n = (b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m)^n,$$

und füge die Bestimmung hinzu, dafs nach ausgeführter Rechnung die Producte der a und der b durch die entsprechenden Coefficienten der Function φ ersetzt werden sollen.

Die gesuchte Eliminationsgleichung läfst sich dann in der symbolischen Form darstellen:

$$(8.)\qquad 2R = 0 =$$
$$(a_1x_1'+a_2x_2'+\cdots)^n(b_1x_1''+b_2x_2''+\cdots)^n+(b_1x_1'+b_2x_2'+\cdots)^n(a_1x_1''+a_2x_2''+\cdots)^n,$$

welche durch die symbolischen Substitutionen in

$$2\varphi(x').\varphi(x'') = 0$$

übergeht.



Jetzt mögen A, B, C die folgenden Ausdrücke bedeuten:

$$(9.)\quad \begin{cases} A = (a_1 x_1' + a_2 x_2' + \cdots)(a_1 x_1'' + a_2 x_2'' + \cdots), \\ B = (b_1 x_1' + b_2 x_2' + \cdots)(b_1 x_1'' + b_2 x_2'' + \cdots), \\ 2C = (a_1 x_1' + a_2 x_2' + \cdots)(b_1 x_1'' + b_2 x_2'' + \cdots) \\ \qquad\qquad + (b_1 x_1' + b_2 x_2' + \cdots)(a_1 x_1'' + a_2 x_2'' + \cdots) \\ \quad = \Sigma_i a_i \frac{\partial B}{\partial b_i} = \Sigma_i b_i \frac{\partial A}{\partial a_i}. \end{cases}$$

Der Ausdruck R läfst sich dann leicht durch A, B, C darstellen, denn es wird offenbar:

$$2R = \{C + \sqrt{C^2 - AB}\}^n + \{C - \sqrt{C^2 - AB}\}^n,$$

oder

$$(10.)\quad R = C^n + \frac{n.n-1}{1.2} C^{n-2}(C^2 - AB) + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} C^{n-4}(C^2 - AB)^2 + \cdots = 0.$$

Die Ausdrücke A, B, C sollen nun näher untersucht werden. Jeder der linearen Factoren, welche A enthält, geht mit Hülfe von (6.) in eine Determinante über, so dafs

$$A = \{\Sigma \pm a_1 p_2 \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(2)} \dots \alpha_m^{(m-2)}\}\{\Sigma \pm a_1 q_2 \alpha_3^{(1)} \alpha_4^{(2)} \dots \alpha_m^{(m-2)}\}$$

wird. Aber dieser Ausdruck läfst sich ferner als eine einzige Determinante folgendermaafsen schreiben:

$$A = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} p_1 q_1 & \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2} & \dots & \frac{p_1 q_m + p_m q_1}{2} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(m-2)} & a_1 \\ \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{2} & p_2 q_2 & \dots & \frac{p_2 q_m + p_m q_2}{2} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(m-2)} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{p_1 q_m + p_m q_1}{2} & \frac{p_2 q_m + p_m q_2}{2} & \dots & p_m q_m & \alpha_m^{(1)} & \alpha_m^{(2)} & \dots & \alpha_m^{(m-2)} & a_m \\ \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \dots & \alpha_m^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_m^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{(m-2)} & \alpha_2^{(m-2)} & \dots & \alpha_m^{(m-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man hierin die p, q mit Hülfe der Gleichungen (4.) ausdrückt, so bemerkt man leicht, dafs man in der vorliegenden Determinante die in $\beta_k^{(h)}$, $\beta_i^{(h)}$ multiplicirten Terme vollständig, durch Abziehen der horizontalen und vertikalen

Reihen, zerstören kann, ohne dafs irgend sonst etwas verändert wird. Es genügt daher in A die p_1q_1, $\frac{p_1q_2+p_2q_1}{2}$, etc. durch u_{11}, u_{12}, etc. zu ersetzen. Hierdurch gewinnt A den Ausdruck:

$$(10^a.)\quad A=(-1)^{m-1}\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} & \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} & \dots & \alpha_1^{(m-2)} & a_1 \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_2^{(m-2)} & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mm} & \alpha_m^{(1)} & \alpha_m^{(2)} & \dots & \alpha_m^{(m-2)} & a_m \\ \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \dots & \alpha_m^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_m^{(2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{(m-2)} & \alpha_2^{(m-2)} & \dots & \alpha_m^{(m-2)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante werde ich durch die Bezeichnung

$$\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a \\ \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a \end{pmatrix}$$

darstellen, indem die obere Reihe $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots a$ die verschiedenen Vertikalreihen, die untere aber die Horizontalreihen andeuten soll, welche sich in der vorliegenden Formel um das System

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1m} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{m1} & u_{m2} & \dots & u_{mm} \end{matrix}$$

gruppiren. Bei dieser Bezeichnungsweise ist daher:

$$(11.)\quad \begin{cases} A=(-1)^{m-1}\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a \\ \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a \end{pmatrix}, \\ B=(-1)^{m-1}\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & b \\ \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & b \end{pmatrix}, \\ C=(-1)^{m-1}\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a \\ \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & b \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Zugleich aber erkennt man, dafs der in die Gleichung (10.) eingehende Ausdruck C^2-AB sich nach einem sehr bekannten Determinantensatze in zwei Factoren zerfällen läfst, so dafs mit Beibehaltung der obigen Bezeichnung:

$$(12.)\quad C^2-AB=-\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots \\ \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a & b \\ \alpha^{(1)} & \alpha^{(2)} & \dots & a & b \end{pmatrix}=-r.D$$

wird, wodurch sich (10.) auch in der Form darstellt:

$$(13.)\quad R = C^n - \frac{n.n-1}{1.2} C^{n-2}.rD + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} C^{n-4}.r^2D^2 - \cdots = 0;$$

welche aufserdem mit Hülfe von (12.) noch mannigfacher Veränderungen fähig ist.

Die Gleichung (13.) stellt nun, unter Hinzunahme der symbolischen Substitutionen, die gesuchte Eliminationsgleichung dar; und zwar ohne überflüssigen Factor. Denn man überzeugt sich leicht, indem man z. B. den Term C^n betrachtet, dafs R für die α vom $2n^{\text{ten}}$, für die u vom n^{ten}, für die Coefficienten von φ aber vom zweiten Grade ist; was nach bekannten allgemeinen Sätzen mit dem Grade der von jedem Factor befreiten Eliminationsgleichung übereinstimmt.

§. 2.

Ueber die Curve, welche die Durchschnittspunkte der ersten und zweiten Polaren beschreiben, während der Pol eine beliebige Curve durchläuft.

Es sei $u(y_1, y_2, y_3) = 0$ die Gleichung einer Curve des p^{ten} Grades. Bezeichnet man die Differentialquotienten von u nach den y, dividirt respective durch p, $p.p-1$, etc., durch u_i, u_{ik}, etc., so ist die Gleichung der Polare eines Punktes x in Bezug auf diese Curve

$$(14.)\quad u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Von dem Punkte α lassen sich an seine eigene Polare $p-1.p-2$ Tangenten ziehen; und die Berührungspunkte derselben liegen in den Schnittpunkten der Curve (14.) mit der zweiten Polare

$$(15.)\quad u_{11}x_1^2 + 2u_{12}x_1x_2 + \cdots = 0.$$

Während nun x sich auf einer Curve n^{ter} Ordnung $\varphi = 0$ bewegt, durchlaufen diese Punkte eine andere Curve; die Gleichung derselben soll aufgestellt werden.

Man hat zu diesem Zwecke die x aus den Gleichungen (14.), (15.) und aus $\varphi = 0$ zu eliminiren. Vergleicht man den Fall mit dem allgemeinen, welcher oben ausgeführt ist, so zeigt sich, dafs nur *eine* Reihe von α vorhanden ist, nämlich die Reihe der Coefficienten u aus der Gleichung (14.).

Es wird hiernach aus Formel (10^a.):

$$A = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_1 & a_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_2 & a_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_3 & a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

oder mit Rücksicht auf die identischen Gleichungen

$$u_i = u_{1i}x_1 + u_{2i}x_2 + u_{3i}x_3, \quad u = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3:$$

$$A = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & 0 & a_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & 0 & a_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -u & -a \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a & 0 \end{vmatrix},$$

wo nur a geschrieben ist für den Ausdruck

$$a = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3.$$

Und diese Form A bringt man leicht in die folgende Gestalt:

$$A = -u\binom{a}{a} - a^2.\Delta,$$

wo die Bezeichnung $\binom{a}{a}$ ganz wie oben zu deuten ist, Δ aber die aus den u_{ik} gebildete Determinante bedeutet. Zugleich ist ebenso

$$B = -u\binom{b}{b} - b^2\Delta,$$

$$C = -u\binom{a}{b} - ab\Delta,$$

$$C^2 - AB = -u\left\{u\binom{ab}{ab} + \Delta\left(a^2\binom{b}{b} + b^2\binom{a}{a} - 2ab\binom{a}{b}\right)\right\}.$$

Der Kürze wegen schreibe ich noch V für den Ausdruck

$$V = a^2\binom{b}{b} + b^2\binom{a}{a} - 2ab\binom{a}{b},$$

wodurch dann die Eliminationsgleichung (10.) die folgende Gestalt annimmt:

$$R = 0 = \left\{ab\Delta + u\binom{a}{b}\right\}^n - \frac{n.n-1}{1.2}\left\{ab\Delta + u\binom{a}{b}\right\}^{n-2} u\left(u\binom{ab}{ab} + \Delta V\right)$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\left\{ab\Delta + u\binom{a}{b}\right\}^{n-4} u^2\left(u\binom{ab}{ab} + \Delta V\right)^2$$
$$- \cdots$$

Diese Curve ist vom $n(3p-4)^{\text{ten}}$ Grade, wie man leicht erkennt, wenn man das erste Glied

$$a^n.b^n.\Delta^n = \varphi^2.\Delta^n$$

betrachtet. Sie steht aufserdem mit den Curven $u=0$, $\Delta=0$ in einem merkwürdigen Zusammenhange. Denn setzt man $u=0$, so reducirt sich die Gleichung auf $\varphi^2.\Delta^n=0$. Sie berührt also die Curve $u=0$ an allen Orten, wo diese die Leitcurve $\varphi=0$ durchschneidet; und aufserdem schneidet die

betrachtete Curve die Curve $u=0$ nur noch in den Wendepunkten derselben, und zwar so, dafs jeder Wendepunkt ein $n$facher Punkt von $R=0$ wird. Das Letztere ist daraus ersichtlich, dafs R in Bezug auf Δ und u homogen, und zwar vom n^{ten} Grade ist. Ich fasse dies in folgenden Sätzen zusammen:

Wenn der Pol eine Curve n^{ten} Grades $\varphi=0$ durchläuft, so beschreiben die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von ihm an seine (in Bezug auf die Curve p^{ten} Grades $u=0$ genommene) Polare ziehen lassen, eine Curve der $n(3p-4)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Dieselbe berührt $u=0$ überall, wo diese Curve von $\varphi=0$ geschnitten wird. (In $n.p$ Punkten.)

Die Wendepunkte von $u=0$ sind $n$fache Punkte der Curve. (Es giebt $3p(p-2)$ solcher $n$fachen Punkte.)

Ich bemerke noch, dafs das Problem der Wendepunkte als ein specieller Fall der vorliegenden Untersuchung aufgefafst werden kann. Denn man kann dasselbe in der Form darstellen: Diejenigen Punkte x einer beliebigen Curve $\varphi=0$ sollen aufgefunden werden, von denen aus sich eine dreipunktig berührende Linie an die Curve $u=0$ ziehen läfst, deren Berührungspunkt dann y sei. In diesem Fall besteht neben den Gleichungen (14.), (15.) noch die Gleichung $u=0$; und man sieht aus dem Obigen, dafs das Resultat der Elimination aus $\varphi=0$ und (14.), (15.) alsdann die merkwürdige Form annimmt:

$$\varphi^2(y_1, y_2, y_3).\Delta = 0.$$

§. 3.

Ueber diejenigen Punkte einer Geraden, in welchen dieselbe die Polare eines ihrer Punkte berühren kann.

Sei $u=0$ eine Curve der p^{ten} Ordnung. Auf jeder Geraden

$$\alpha = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

giebt es dann solche Punkte y, deren Polare von eben dieser Geraden in einem Punkte x berührt wird. In der That, wenn die Gleichung der Polare durch

$$v = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

bezeichnet wird, hat man nur auszudrücken, dafs die Tangente der Polare im Punkte x mit der Linie α zusammenfällt. Zu diesem Zweck müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + u_{13} y_3 &= \lambda\alpha_1, \\ u_{21} y_1 + u_{22} y_2 + u_{23} y_3 &= \lambda\alpha_2, \\ u_{31} y_1 + u_{32} y_2 + u_{33} y_3 &= \lambda\alpha_3. \end{aligned}$$

Verbindet man mit diesen Gleichungen die Gleichungen

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0,$$
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

so bestimmen sich hierdurch die Verhältnisse der y, x vollständig; und zwar finden sich insbesondere die x bestimmt durch die Gleichungen:

$$(16.)\quad \begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \\ 0 = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 \end{vmatrix} = -\Sigma\Sigma \alpha_i \alpha_k U_{ik}. \end{cases}$$

Man kann hieraus zunächst die beiden Sätze ziehen:

Auf jeder Geraden giebt es $2(p-2)$ solcher Punkte, deren Polare von eben dieser Geraden berührt wird.

Durch jeden Punkt lassen sich zwei solcher Geraden ziehen, in deren jeder ein Punkt die Gerade selbst zur Tangente seiner Polare hat, mit dem gegebenen Punkte als Berührungspunkt.

Und man kann hinzufügen:

Die Hessesche Determinante, gleich Null gesetzt, giebt den geometrischen Ort derjenigen Punkte, für welche diese Geraden in eine einzige zusammenfallen.

Bewegt sich nun die Gerade, indem sie eine Curve der n^{ten} Classe

$$(17.)\quad \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$$

umhüllt, so bewegen sich die Berührungspunkte x auf einer Curve, deren Gleichung durch Elimination der α aus den Gleichungen (16.), (17.) erhalten wird. Diese Gleichung ist nach der oben entwickelten Methode allgemein aufstellbar.

Es wird zunächst offenbar

$$A = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & a_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & a_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man aber die identische Gleichung bemerkt:

$$u_1 U_{1i} + u_2 U_{2i} + u_3 U_{3i} = x_i . \Delta$$



(vgl. die Definitionen des vorigen Paragraphen), so ergiebt sich, indem man die ersten drei Vertikalreihen von A mit $\frac{u_1}{\Delta}, \frac{u_2}{\Delta}, \frac{u_3}{\Delta}$ multiplicirt und von der vierten abzieht:

$$A = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & 0 & a_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & 0 & a_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & 0 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & -u & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & -a & 0 \end{vmatrix} = -\frac{u}{\Delta}\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & a_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & a_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} + \frac{a}{\Delta}\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & a_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & a_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix},$$

wo

$$a = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3$$

gesetzt ist.

Da nun ferner nach bekannten Sätzen

$$U_{22} U_{33} - U_{23}^2 = \Delta . u_{11} \quad \text{etc.},$$

so erhält man für A die einfache Form:

$$A = u \Sigma \Sigma a_i a_k u_{ik} - a \Sigma \Sigma a_i x_k u_{ik}.$$

Endlich wird noch

$$\Sigma_k x_k u_{ik} = u_i,$$

mithin auch

$$A = u \Sigma \Sigma a_i a_k u_{ik} - a^2.$$

Ebenso ferner:

$$B = u \Sigma \Sigma b_i b_k u_{ik} - b^2,$$
$$C = u \Sigma \Sigma a_i b_k u_{ik} - ab.$$

Es bleibt noch übrig, nach (12.) den Ausdruck $C^2 - AB$ zu entwickeln. Die bezeichnete Gleichung aber giebt:

$$C^2 - AB = -r . D$$

und

$$r = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = -\Delta . u,$$

$$D = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & a_1 & b_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & a_2 & b_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & a_3 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 = -\varrho^2.$$

Mit Hülfe dieser Ausdrücke giebt also (13.) folgendes Eliminationsresultat:

$$(18.)\quad R = 0 = (u\Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik} - ab)^n - \frac{n.n-1}{1.2}\Delta u \varrho^2 (u\Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik} - ab)^{n-2}$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\Delta^2 u^2 \varrho^4 (u\Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik} - ab)^{n-4}$$
$$- \cdots\cdots,$$

wobei noch die symbolischen Substitutionen auszuführen sind.

Diese Curve ist vom $2n(p-1)^{\text{ten}}$ Grade, wie man leicht erkennt, wenn man $u = 0$ setzt. Alsdann ist

$$R = a^n . b^n = [\varphi(u_1, u_2, u_3)]^2.$$

Hieraus geht zugleich hervor, dafs die Curve $R = 0$ immer die Curve $u = 0$ berührt, wo sie dieselbe trifft, also in $n^2(p-1)$ Punkten; und dafs diese $n^2(p-1)$ Berührungspunkte auf einer Curve der $n(p-1)^{\text{ten}}$ Ordnung

$$\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$$

liegen.

Diese Curve hat an sich eine einfache Bedeutung. Die Polaren aller Punkte der Geraden $\alpha = 0$ schneiden sich in den nämlichen $(p-1)^2$ Punkten, welche durch die Gleichungen

$$u_1 = \lambda\alpha_1,$$
$$u_2 = \lambda\alpha_2,$$
$$u_3 = \lambda\alpha_3$$

bestimmt sind. Berührt also α die Curve $\varphi = 0$, so beschreiben diese Schnittpunkte eben jene Curve $\varphi(u_1, u_2, u_3) = 0$, welche durch die Berührungspunkte von $u = 0$ mit $R = 0$ hindurchgeht.

Aber die Curve $R = 0$ berührt auch $\Delta = 0$ überall, wo sie diese Curve trifft, also in $3n(p-1)(p-2)$ Punkten. Um dies zu beweisen, kann man folgendermafsen verfahren. Es reducirt sich für $\Delta = 0$ der Ausdruck R auf die symbolische Form

$$C^n = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & b_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & b_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}^n = 0.$$

Soll die Curve, welche dieser symbolische Ausdruck darstellt, die Curve $\Delta = 0$ berühren, so mufs sich immer eine Function P von solcher

Beschaffenheit angeben lassen, dafs $P.C^n$ mit Hülfe der Gleichung $\Delta=0$ in ein vollständiges Quadrat übergeht. Ein solcher Factor ist die n^{te} Potenz der Determinante

$$Q=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & c_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & c_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & c_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher die c ganz beliebige Gröfsen bedeuten. Denn bekanntlich ist dann

$$Q.C=\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & a_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & a_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & b_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & b_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & b_3 \\ x_1 & x_2 & x_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$-\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Hier verschwindet das letzte Glied, weil es, wie oben gezeigt, den Factor Δ erhält; daher ist endlich; indem man noch bemerkt, dafs für die a, b die gleichen symbolischen Substitutionen zu machen sind:

$$Q^n.C^n=\left\{\begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & x_1 & a_1 \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & x_2 & a_2 \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & x_3 & a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}^n\right\}^2=[\{u\Sigma_i\Sigma_k a_i c_k u_{ik}-\Sigma_i u_i a_i.\Sigma_k u_k c_k\}^n]^2.$$

Dies ist die verlangte Umformung; und man erkennt, dafs sich durch die $3n(p-1)(p-2)$ Berührungspunkte von $R=0$, $\Delta=0$ unendlich viele Curven $2n(p-1)^{ter}$ Ordnung

$$\Phi=\{u\Sigma_i\Sigma_k a_i c_k u_{ik}-\Sigma_i u_i a_i.\Sigma_k u_k c_k\}^n=0$$

legen lassen. Diese Curven haben je $p(p-1)$ $n$fache Punkte, nämlich die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von einem beliebigen Punkte c_1, c_2, c_3 an die Curve $u=0$ ziehen lassen; denn Φ erscheint als eine

homogene Function n^{ter} Ordnung der Ausdrücke

$$u \quad \text{und} \quad c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3,$$

welche, gleich Null gesetzt, durch ihre gemeinsamen Lösungen jene Berührungspunkte darstellen.

Die Curven $\Phi=0$ berühren aufserdem immer noch die Curve $\Delta=0$ $n$punktig in $3(p-1)(p-2)$ Punkten, welche nicht der Curve $R=0$ angehören; und in diesen Punkten wird zugleich $\Delta=0$ von einer Curve $Q=0$ berührt, welche von der $2(p-1)^{ten}$ Ordnung ist. Die Curve Q hat aber die Form

$$u\Sigma\Sigma c_i c_k u_{ik}-(c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3)^2 = 0.$$

Sie wird also sowohl von $u=0$ als von der zweiten Polaren des Punktes c, $(\Sigma\Sigma c_i c_k u_{ik}=0)$ überall berührt, wo sie diesen Curven begegnet; die Berührungspunkte liegen auf der ersten Polaren. Man bemerkt auch noch leicht, dafs Q durch c hindurchgeht, da für $x=c$ die Gleichung von Q in $u.u-u^2$ übergeht.

Ich fasse diese Sätze in Folgendes zusammen:

Wenn die Gerade α eine Curve φ n^{ter} Ordnung umhüllt, so beschreiben die Punkte derselben, in welchen sie Tangente der Polaren eines ihrer Punkte in Bezug auf eine Curve p^{ter} Ordnung $u=0$ werden kann, eine Curve $2n(p-1)^{ter}$ Ordnung $R=0$.

Die Curve R berührt die Curve u, wo sie derselben begegnet, nämlich in $n^2(p-1)$ Punkten.

Diese Punkte liegen ihrerseits auf einer Curve $n(p-1)^{ter}$ Ordnung, dem geometrischen Ort der Punkte, in welchen sich die Polaren aller, einer bestimmten Lage von α angehörigen Punkte durchschneiden.

Die Curve R berührt die Determinante Δ von u in $3n(p-1)(p-2)$ Punkten; überall, wo sie derselben begegnet.

Durch diese $3n(p-1)(p-2)$ Punkte lassen sich immer unendlich viele Curven Φ von der $2n(p-1)^{ten}$ Ordnung, deren jede noch die Coordinaten eines beliebigen Punktes c enthält, hindurchlegen.

Jede dieser Curven Φ hat $p(p-1)$ $n$fache Punkte, die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von c an u legen lassen.

Jede dieser Curven berührt aufserdem Δ in $3(p-1)(p-2)$ verschiedenen Punkten $n$punktig; und in solchen $3(p-1)(p-2)$ Punkten wird immer $\Delta=0$ noch von einer Curve $Q=0$ der $2(p-1)^{ten}$ Ordnung berührt, welche von der Curve φ ganz unabhängig ist.

Jede solche Curve Q berührt wieder in den $p(p-1)$ Berührungspunkten der von c an u gezogenen Tangenten die Curve $u=0$; sie geht durch c und wird von der Polare des Punktes c noch in $(p-1)(p-2)$ anderen Punkten geschnitten, welche auf einer Curve $(p-2)^{ter}$ Ordnung, der zweiten Polare von c, liegen; und zwar berührt die zweite Polare in all diesen Punkten die Curve Q.

§. 4.

Ueber diejenigen Polaren, deren eine Wendetangente durch den Pol geht.

Aus den obigen Formeln läfst sich die Gleichung einer anderen Curve ableiten, welche von hervorragendem Interesse ist. Es giebt nämlich unendlich viele Gerade α, welche für die Polare eines ihrer Punkte Wendetangenten werden. Die zugehörigen Wendepunkte bilden dann eine Curve, welche darzustellen der Zweck dieses Paragraphen ist.

Soll x ein Wendepunkt der Polaren

$$v = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0$$

sein, so müssen die zweiten Differentialquotienten von v Coefficienten eines Ausdrucks zweiter Ordnung werden, welcher in zwei Factoren zerfällt; und zwar mufs der eine Factor die Wendetangente, mithin hier die Linie α darstellen. Es ist also nothwendig für alle Werthe von i, k:

$$y_1 u_{1ik} + y_2 u_{2ik} + y_3 u_{3ik} = \alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k.$$

Wenn man aus diesen Gleichungen die y und die β eliminirt, so erhält man eine Gleichung, welche man, nach Herrn *Aronhold*, durch

$$S_u = 0$$

bezeichnen kann; wo nur statt der Coefficienten einer Function dritter Ordnung die dritten Differentialquotienten von u, dividirt durch $p(p-1)(p-2)$, bei der Bildung von S_u zu benutzen sind. Diese Gleichung ist von der dritten Ordnung für die α, und kann nach Herrn *Aronhold* in der Form geschrieben werden:

$$S_u = \Sigma\Sigma\Sigma s_{ikh} \alpha_i \alpha_k \alpha_h = 0;$$

die Bildung der s und die Gesetze, denen diese Coefficienten genügen, finden sich dieses Journal Bd. 55, p. 97 u. folgg. angegeben.

Der Ausdruck S_u ist eine Zwischenform, welche allen höheren Curven angehört. Für den vorliegenden Zweck aber kann man offenbar diese Function



an die Stelle von φ treten lassen, um die gesuchte Curvengleichung zu erhalten. Man hat also nichts weiter zu thun, als in der Gleichung (18.) $n=3$ zu setzen, und die symbolische Substitution

$$a_i a_k a_h = b_i b_k b_h = s_{ikh}$$

auszuführen.

Für $n=3$ nimmt die Gleichung (18.) nun zunächst die Gestalt an:

$$\begin{aligned} R = C^3 - 3\Delta.u.\varrho^2 C = CAB - 4\Delta.u.\varrho^2 C = 0 \\ = (u\Sigma\Sigma a_i a_k u_{ik} - a^2)(u\Sigma\Sigma b_i b_k u_{ik} - b^2)(u\Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik} - ab) \\ - 4\Delta.u(\Sigma \pm x_1 a_2 b_3)^2 (u\Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik} - ab). \end{aligned}$$

Um die definitive Darstellung dieses Ausdrucks zu bewerkstelligen, setze ich ihn zunächst in die Form:

$$(19.) \qquad R = M - 4\Delta.u.(Nu - P),$$

wo denn

$$(20.) \quad \begin{cases} M = (u\Sigma\Sigma a_i a_k u_{ik} - a^2)(u\Sigma\Sigma b_i b_k u_{ik} - b^2)(u\Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik} - ab), \\ N = (\Sigma \pm x_1 a_2 b_3)^2 \Sigma\Sigma a_i b_k u_{ik}, \\ P = (\Sigma \pm x_1 a_2 b_3)^2 ab. \end{cases}$$

Ich bemerke nun, was unmittelbar klar ist, dafs in diesen Ausdrücken die Gröfsen u_{ikh} ebenso behandelt werden können, als wären sie constante Coefficienten einer Function dritter Ordnung; wodurch denn die

$$u_{ik} = \Sigma_h u_{hik} x_h$$

als lineare Functionen, die

$$u_i = \Sigma_h \Sigma_k u_{hki} x_h x_k$$

als Functionen zweiter Ordnung der x erscheinen, während die aus den symbolischen Substitutionen entspringenden Gröfsen s_{ikh} sich als Constante, und zwar als homogene Functionen dritter Ordnung der u_{ikh} darstellen. Unter diesem Gesichtspunkte aber kann man einige der Formeln anwenden, welche Herr *Aronhold* gegeben hat, und welche auf leichte Weise zur Transformation von M, N, P führen. Diese Formeln finden sich Bd. 55 dieses Journals p. 132 (Theor. 8) und p. 144, Formel (4.), und lauten in die hier gebrauchten Zeichen übertragen:

$$(21.) \qquad u_1 s_{1k\lambda} + u_2 s_{2k\lambda} + u_3 s_{3k\lambda} = 6(u, \Delta)^{k\lambda} + S.x_k x_\lambda,$$

$$(22.) \qquad \Sigma_k \Sigma_\lambda u_{hk\lambda} s_{ik\lambda} = 0, \qquad \Sigma_k \Sigma_\lambda u_{ik\lambda} s_{ik\lambda} = 2S.$$

In diesen Formeln bedeuten die Gröfsen $(u, \Delta)^{kl}$ folgende Ausdrücke:

$$(23.)\quad \begin{cases} (u, \Delta)^{11} = u_{22}\Delta_{33} + u_{33}\Delta_{22} - 2u_{23}\Delta_{23}, \\ (u, \Delta)^{23} = u_{12}\Delta_{13} + u_{13}\Delta_{12} - u_{11}\Delta_{23} - u_{23}\Delta_{11}, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

ferner sind die Δ_{ik} zweite Differentialquotienten von Δ, so genommen als wären die u_{ikh} constante Zahlen, und dividirt durch 6. Die Ziffer 6, welche sich in der Gleichung (21.) abweichend von der Formel des Herrn *Aronhold* findet, erklärt sich dadurch, dafs die Function Δ des Herrn *Aronhold* das Sechsfache der hier eingeführten ist; ein Unterschied, der sich bei der Allgemeinheit der vorliegenden Untersuchung nicht wohl vermeiden liefs.

Nun aber giebt die Ausführung der symbolischen Substitutionen bei M:

$$\begin{aligned} M = {} & u^3\Sigma\Sigma s_{ikh}s_{\mu\nu\varrho}u_{ik}u_{\mu\nu}u_{h\varrho} - u^2(\Sigma s_{ikh}u_h u_{ik})^2 \\ & - 2u^2\Sigma\Sigma s_{ikh}s_{\mu\nu\varrho}u_{ik}u_{h\varrho}u_\mu u_\nu + u\,\Sigma\Sigma s_{ikh}s_{\mu\nu\varrho}u_{h\varrho}u_i u_k u_\mu u_\nu \\ & + 2u\,\Sigma s_{ikh}u_{ik}u_h . \Sigma s_{ikh}u_i u_k u_h - (\Sigma s_{ikh}u_i u_k u_h)^2. \end{aligned}$$

Wendet man auf diesen Ausdruck die Gleichung (22.) an, aus welcher sich sogleich

$$\Sigma_i\Sigma_k s_{ikh}u_{ik} = 2S.x_h$$

ergiebt, so findet sich:

$$\begin{aligned} \Sigma\Sigma s_{ikh}s_{\mu\nu\varrho}u_{ik}u_{\mu\nu}u_{h\varrho} &= 4S^2.u, \\ \Sigma s_{ikh}u_h u_{ik} &= 2S.u, \\ \Sigma\Sigma s_{ikh}s_{\mu\nu\varrho}u_{ik}u_{h\varrho}u_\mu u_\nu &= 2S.\Sigma s_{\mu\nu\varrho}u_\mu u_\nu u_\varrho; \end{aligned}$$

man sieht daher, dafs einige Terme von M sich ohne Weiteres zerstören; und der Rest ist:

$$(24.)\quad M = u\,\Sigma\Sigma s_{ikh}s_{\mu\nu\varrho}u_{h\varrho}u_i u_k u_\mu u_\nu - (\Sigma s_{ikh}u_i u_k u_h)^2 = uF - G^2.$$

Hierauf kann man nun die Gleichung (21.) anwenden, und erhält sodann zunächst:

$$(25.)\quad \Sigma_i\Sigma_k u_i u_k s_{ikh} = S.u.x_h + 6\Sigma_k(u, \Delta)^{kh}u_k.$$

Den letzten Term betrachte ich z. B. für $h = 1$. Dann ist nach (23.)

$$\Sigma_k(u, \Delta)^{k1}u_k = \begin{vmatrix} u_1 & u_{12} & \Delta_{13} \\ u_2 & u_{22} & \Delta_{23} \\ u_3 & u_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & \Delta_{12} & u_{13} \\ u_2 & \Delta_{22} & u_{23} \\ u_3 & \Delta_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

$$= x_1\left\{\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \Delta_{13} \\ u_{21} & u_{22} & \Delta_{23} \\ u_{31} & u_{32} & \Delta_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11} & \Delta_{12} & u_{13} \\ u_{21} & \Delta_{22} & u_{23} \\ u_{31} & \Delta_{32} & u_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta_{11} & u_{12} & u_{13} \\ \Delta_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \Delta_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}\right\} - \begin{vmatrix} \Delta_1 & u_{12} & u_{13} \\ \Delta_2 & u_{22} & u_{23} \\ \Delta_3 & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}.$$

Der Coefficient von x_1 ist aber der Coefficient von a^2b in der Entwicklung von $\Delta(au+b\Delta u)$, also nach Herrn *Aronhold* (a. a. O. p. 127), und mit Rücksicht auf die veränderte Bedeutung von Δ, gleich

$$\tfrac{1}{12}S.u.$$

Daher geht (25.) in die Gestalt über:

$$\Sigma_i\Sigma_k u_i u_k s_{ikh} = \tfrac{3}{2}S.u.x_h - 6\Sigma_i\Delta_i U_{hi}.$$

Führt man dies in die Gleichung (24.) ein, so kommt:

$$F = \Sigma_h\Sigma_\varrho(\tfrac{3}{2}S.u.x_h - 6\Sigma_i\Delta_i U_{hi})(\tfrac{3}{2}S.u.x_\varrho - 6\Sigma_k\Delta_k U_{\varrho k})u_{h\varrho},$$

oder nach einfachen Reductionen:

$$F = \tfrac{9}{4}S^2u^3 - 18S.u.\Delta^2 + 36\Delta.\Sigma_i\Sigma_k\Delta_i\Delta_k U_{ik}.$$

Ferner aber ist

$$G = \Sigma_h(\tfrac{3}{2}S.u.x_h - 6\Sigma_i\Delta_i U_{hi})u_h = \tfrac{3}{2}S.u^2 - 6.\Delta^2,$$

endlich also

$$(26.)\qquad M = 36(\Delta.u.\Phi - \Delta^4),$$

wo der Kürze wegen durch Φ die Covariante sechster Ordnung

$$(27.)\qquad \Phi = \Sigma_i\Sigma_k\Delta_i\Delta_k U_{ik}$$

bezeichnet ist.

Ich gehe jetzt zur Bestimmung von P über. Durch die symbolische Substitution nimmt P die Gestalt an:

$$P = \Sigma_i\Sigma_k x_i x_k (s_\mu, s_\nu)^{ik}.u_\mu u_\nu,$$

wo der Ausdruck $(s_\mu, s_\nu)^{ik}$ genau dieselbe Bedeutung hat, wie bei Herrn *Aronhold*, daher auch genau denselben Gesetzen unterliegt. Nun ist aber dann zunächst nach (21.)

$$P = \Sigma_i\Sigma_k x_i x_k(6(u,\Delta)+S.xx,\ 6(u,\Delta)+S.xx)^{ik},$$

oder durch Anwendung des *Aronhold*schen Vertauschungssatzes:

$$\begin{aligned}P &= \Sigma_i\Sigma_k(6(u,\Delta)^{ik}+S.x_ix_k)(xx,\ 6(u,\Delta)+S.xx)^{ik}\\ &= 6\Sigma_i\Sigma_k(6(u,\Delta)^{ik}+S.x_ix_k)(xx,(u,\Delta))^{ik}\\ &= 6\Sigma_i\Sigma_k(u,\Delta)^{ik}(xx,\ 6(u,\Delta)+S.xx)^{ik} = 36\Sigma_i\Sigma_k(u,\Delta)^{ik}.(xx,(u,\Delta))^{ik}.\end{aligned}$$

Inzwischen findet man aus den Ausdrücken (23.)

$$(xx,(u,\Delta))^{ik} = u\Delta_{ik} + \Delta u_{ik} - \Delta_i u_k - \Delta_k u_i;$$

daher

$$P = 36(u\Sigma_i\Sigma_k(u,\Delta)^{ik}\Delta_{ik} + \Delta\Sigma_i\Sigma_k(u,\Delta)^{ik}u_{ik} - 2\Sigma_i\Sigma_k(u,\Delta)^{ik}u_i\Delta_k).$$

Die ersten beiden Summen in diesem Ausdrucke sind die Coefficienten von ab^2 und a^2b in der Entwicklung von $\varDelta(au+b\varDelta u)$, und sind daher nach der oben angeführten Formel gleich

$$\frac{T.u}{36}-\frac{S.\varDelta}{12} \quad \text{und} \quad \frac{S.u}{12};$$

die letzte Summe ist nach den oben bei (25.) entwickelten Beziehungen

$$\Sigma_i\Sigma_k(u,\varDelta)^{ik}u_i\varDelta_k=\frac{S.u.\varDelta}{12}-\Sigma_i\Sigma_k\varDelta_i\varDelta_k U_{ik}=\frac{S.\varDelta.u}{12}-\Phi.$$

Und somit ist die definitive Form von P:

$$(28.)\qquad P=72\Phi-6S.u.\varDelta+T.u^2.$$

Es bleibt nur noch N zu entwickeln.

Zunächst ergiebt sich durch die symbolischen Substitutionen die Form

$$N=\Sigma\Sigma x_i x_k u_{\mu\nu}(s_\mu,s_\nu)^{ik}$$

oder auch

$$=\Sigma\Sigma s_{\mu ik}u_{\mu\nu}(xx,s_\nu)^{ik}.$$

Man erhält aber durch Differentiation der Gleichung (21.):

$$s_{1ik}u_{1\nu}+s_{2ik}u_{2\nu}+s_{3ik}u_{3\nu}=6(u_\nu,\varDelta)^{ik}+6(u,\varDelta_\nu)^{ik}+S.\frac{\partial.x_ix_k}{\partial x_\nu}.$$

Daher:

$$N=6\Sigma_i\Sigma_k\Sigma_\nu(u_\nu,\varDelta)^{ik}(xx,s_\nu)^{ik}+6\Sigma_i\Sigma_k\Sigma_\nu(u,\varDelta_\nu)^{ik}(xx,s_\nu)^{ik}$$
$$+2S.\Sigma_\nu\{x_1(xx,s_\nu)^{1\nu}+x_2(xx,s_\nu)^{2\nu}+x_3(xx,s_\nu)^{3\nu}\}.$$

Der Coefficient von S im letzten Gliede verschwindet identisch. Um dies einzusehen, denke man sich etwa statt der s_{ikh} wieder die symbolischen Producte $a_ia_ka_h$ gesetzt. Dann geht der bezeichnete Coefficient über in

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & a_1\\ x_2 & x_2 & a_2\\ x_3 & x_3 & a_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_1 & x_1 & a_1\\ a_2 & x_2 & a_2\\ a_3 & x_3 & a_3\end{vmatrix},$$

was identisch Null ist. Um die wahren Ausdrücke der ersten Glieder von N zu finden, kann man ein ähnliches Verfahren anwenden. Denkt man sich die Gröfsen

$$s_{ikh},\quad u_{ikh},\quad \varDelta_{ikh}$$

bezüglich dargestellt durch die symbolischen Producte

$$a_ia_ka_h,\quad b_ib_kb_h,\quad c_ic_kc_h,$$

so wird:

$$N = 6\Sigma_\nu \left\{ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} \right\}^2$$
$$\times a_\nu (b_\nu (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) + c_\nu (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3))$$
$$= 6\Sigma_\nu \begin{vmatrix} b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 & b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 & c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \end{vmatrix}^2$$
$$\times u_\nu (b_\nu (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) + c_\nu (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3))$$
$$= 6\Sigma_\nu \{ u_\nu \Sigma_i \Sigma_k s_{\nu ik} \Delta_{ik} + \Delta \Sigma_i \Sigma_k u_{\nu ik} s_{\nu ik} - 2\Sigma_i \Sigma_k u_{\nu i} s_{\nu ik} \Delta_k \}$$
$$+ 6\Sigma_\nu \{ \Delta_\nu \Sigma_i \Sigma_k s_{\nu ik} u_{ik} + u \Sigma_i \Sigma_k \Delta_{\nu ik} s_{\nu ik} - 2\Sigma_i \Sigma_k \Delta_{\nu i} s_{\nu ik} u_k \}.$$

Bemerkt man nun die Gleichungen (22.), so wie die analogen (a. a. O. p. 154, Theor. 18):

$$\Sigma_i \Sigma_k s_{ik\nu} \Delta_{ik\mu} = 0, \qquad \Sigma_i \Sigma_k s_{ik\nu} \Delta_{ik\nu} = \tfrac{1}{3} T,$$

so kommt

$$N = 6\left(\frac{u.T}{3} + 6\Delta.S - 4\Delta.S + 2S.\Delta + u.T - 2\frac{T.u}{3}\right)$$
$$= 4T.u + 24\Delta.S.$$

Führt man alle erhaltenen Resultate nunmehr in die Gleichung (19.) ein, so wird die gesuchte Gleichung:

$$(29.) \quad \begin{cases} R = 36(\Delta.u.\Phi - \Delta^4) - 4\Delta u(u(4T.u + 24\Delta.S) - 72\Phi + 6S.u.\Delta - T.u^2) \\ \quad = 12\Delta\{27u.\Phi - 3\Delta^3 - T.u^3 - 10\Delta.u^2.S\} = 0. \end{cases}$$

Bis hierher wurden die u_{ikh} als Constante betrachtet; man kann sie aber ohne Weiteres wieder in ihrem wahren Werthe bestehen lassen, sobald man die Gröfsen Δ_i gehörig definirt, welche in der Form

$$(30.) \qquad \Phi = \Sigma\Sigma \Delta_i \Delta_k U_{ik}$$

enthalten sind. Diese Gröfsen bedeuteten während der Rechnung die Differentialquotienten von Δ, genommen als ob die u_{ikh} constant wären, und dividirt durch 3; d. h. es war

$$\Delta_m = \tfrac{1}{3} \Sigma_i \Sigma_k U_{ik} u_{ikm}.$$

Fortan sollen aber durch Δ_m die wirklichen Differentialquotienten von Δ bezeichnet werden, dividirt durch den Grad von Δ, $3(p-2)$, wie das bei den u ganz analog geschieht. Dann ist also

$$\Delta_m = \frac{1}{3(p-2)} \Sigma_i \Sigma_k U_{ik}.(p-2) u_{ikm}.$$

Man erkennt, dafs diese Definition vollkommen mit der obigen übereinstimmt. Man darf daher die Gleichungen (29.) vollkommen in derselben Form gelten lassen, indem man für die Δ_m die neuen Definitionen feststellt.

Die Gleichung (29.) *löst sich in die Curve* $\Delta = 0$ *auf, und in eine Curve* $9(p-2)^{ter}$ *Ordnung, welche mit der Curve* $u = 0$ *in den Wendepunkten eine Berührung dritter Ordnung hat, so dafs die Wendepunkte von u auch Wendepunkte der neuen Curve werden, und zwar fallen auch die Wendetangenten beider Curven in diesen Punkten zusammen.* Die Gleichung dieser Curve $9(p-2)^{ter}$ Ordnung wird:

$$27u.\Phi - 3\Delta^3 - T.u^3 - 10\Delta.u^2S = 0.$$

Diese Gleichung ist dadurch merkwürdig, dafs in ihr die Covarianten Δ, S, T, Φ, welche zunächst der Theorie der Curven dritter Ordnung entnommen sind, eine allgemeine Anwendung finden. Solcher Anwendungen sind ohne Zweifel noch sehr viele zu erwarten, so wie die Function Δ sich bereits auf die mannigfachste Weise verwerthet hat. Ich benutze diese Gelegenheit um eines bemerkenswerthen Satzes zu gedenken, der in die Kategorie dieser Anwendungen gehört, und welchen ich an einem anderen Orte beweisen werde:

Es giebt jederzeit $12(n-2)(n-3)$ *Punkte, deren Polare, genommen in Bezug auf eine Curve der* p^{ten} *Ordnung, einen Rückkehrpunkt hat, und die* $12(n-2)(n-3)$ *Rückkehrpunkte sind die Schnittpunkte der Curven*

$$\Delta = 0, \quad S = 0,$$

von denen die erste vom $3(n-2)^{ten}$, *die zweite vom* $4(n-3)^{ten}$ *Grade ist.*

Carlsruhe, im Juni 1860.

Von einigen Summen- und Differenzenformeln und den *Bernoulli*schen Zahlen.

(Von Herrn G. *Bauer* zu *München*.)

No. 1. In einem Aufsatz über die Gammafunctionen im 57sten Bande dieses Journals bin ich zu mehreren neuen independenten Ausdrücken für die *Bernoulli*schen Zahlen gelangt. Bezeichnet B_{2n-1} die n^{te} *Bernoulli*sche Zahl, und ist

$$N_i^{(n)} = 1^n - \binom{i}{1}2^n + \binom{i}{2}3^n - \cdots \pm (i+1)^n,$$

wo $\binom{i}{1}$, $\binom{i}{2}$ u. s. f. den ersten, zweiten u. s. f. Binomialcoefficienten der i^{ten} Potenz darstellt, so hat man z. B.

$$(1.)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{1}{i+1} N_{i-1}^{(n)} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} B_n, & \text{wenn } n \text{ ungerade} \\ \qquad\qquad\qquad = 0, & \text{wenn } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Die Gröfsen N_i treten auch in der Entwicklung der $(i+1)^{\text{ten}}$ Differenz der Potenzen von x auf und es ist aus der Differenzenrechnung bekannt, dafs für irgend ein n

$$N_n^{(n)} = (-1)^n.1.2.3\dots n, \quad \text{und}$$
$$N_i^{(n)} = 0, \quad \text{wenn } i > n;$$

aufserdem ist

$$N_0^{(n)} = 1.$$

Diese Gröfsen N nun genügen gewissen Relationen, mittelst welcher man die in Gleichung (1.) enthaltene Summe und andere ähnliche durch einfache Differenzenformeln ersetzen kann.

No. 2. Diese Relationen, welche zwischen den Gröfsen N bestehen, und von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt, sind folgende:

$$(\text{I.})\quad \begin{cases} N_0^{(n)} = 1, \\ N_1^{(n)} = 2N_1^{(n-1)} - 1N_0^{(n-1)}, \\ N_2^{(n)} = 3N_2^{(n-1)} - 2N_1^{(n-1)}, \\ \dots\dots\dots \\ N_i^{(n)} = (i+1)N_i^{(n-1)} - iN_{i-1}^{(n-1)}, \\ \dots\dots\dots \\ N_{n-1}^{(n)} = nN_{n-1}^{(n-1)} - (n-1)N_{n-2}^{(n-1)}, \\ N_n^{(n)} = \qquad -nN_{n-1}^{(n-1)}. \end{cases}$$

Bezeichnet nun $f(i)$ eine Function der ganzen Zahl i, welche nicht unendlich wird für $i=0$, so folgt aus dem System (I.)

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (i+1) f(i) N_i^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{i=n} i f(i) N_{i-1}^{(n-1)}$$
$$= \sum_{i=0}^{i=n-1} (i+1)[f(i)-f(i+1)] N_i^{n-1}.$$

Setzt man also

$$f(i)-f(i+1) = \Delta . f(i),$$

so wird

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} (i+1) \Delta . f(i) . N_i^{(n-1)}.$$

Diese Transformation n mal angewandt giebt aber sogleich, wenn man die $n$fache Differenz

$$\Delta . (i+1) \Delta . (i+1) \Delta \ldots \Delta . (i+1) \Delta . f(i)$$

mit $\overset{n}{\mathrm{D}} f(i)$ bezeichnet

$$\text{(II.)} \quad \sum_{i=0}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = (\overset{n}{\mathrm{D}} f(i))_{i=0}.$$

Auf ganz dieselbe Weise erhält man aus den Gleichungen (I.), wenn man die Summe von $i=1$ an nimmt,

$$\text{(III.)} \quad \sum_{i=1}^{i=n} f(i) N_i^{(n)} = -f(1) - 2[\overset{1}{\mathrm{D}} f(i) + \overset{2}{\mathrm{D}} f(i) + \cdots + \overset{n-1}{\mathrm{D}} f(i)]_{i=1},$$

wo $\overset{1}{\mathrm{D}} f(i) = \Delta . f(i)$.

Setzt man in diesen Gleichungen z. B. $f(i) = \text{const.}$, so geben sie

$$\text{(2.)} \quad \sum_{i=0}^{i=n} N_i^{(n)} = 0;$$

setzt man aber in (III.) $f(i) = \frac{1}{i}$, so wird

$$\Delta . f(i) = \overset{2}{\mathrm{D}} f(i) = \cdots = \overset{n-1}{\mathrm{D}} f(i) = \frac{1}{i(i+1)},$$

mithin

$$\text{(3.)} \quad \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i} N_i^{(n)} = -n,$$

wie ich schon in der angeführten Abhandlung gefunden habe.

No. 3. Bevor ich weitere Anwendungen von diesen Formeln (II.) und (III.) gebe, will ich den Ausdruck $\overset{n}{\mathrm{D}} f(i)$ direct nach den Differenzen von $f(i)$ entwickeln.

Es ist

$$R_i S_i - R_{i+1} S_{i+1} = R_i(S_i - S_{i+1}) + S_i(R_i - R_{i+1}) - (R_i - R_{i+1})(S_i - S_{i+1}),$$

mithin nach der hier gebrauchten Bedeutung von $\triangle$

$$\triangle . R_i S_i = R_i \triangle . S_i + S_i \triangle . R_i - \triangle . R_i \triangle . S_i.$$

Vermöge dieser Formel hat man, da $\triangle.(i+1) = -1$ ist,

$$\text{(a.)} \qquad \overset{n}{\mathrm{D}} f(i) = \triangle.(i+1) \overset{n-1}{\mathrm{D}} f(i) = -\overset{n-1}{\mathrm{D}} f(i) + (i+2) \triangle . \overset{n-1}{\mathrm{D}} f(i).$$

Hieraus ersieht man, dafs $\overset{n}{\mathrm{D}} f(i)$ von der Form sein mufs:

$$\overset{n}{\mathrm{D}} f(i) = (-1)^{n-1}[\triangle . f(i) + A_1^{(n)}(i+2)\triangle^2 . f(i) + A_2^{(n)}(i+2)(i+3)\triangle^3 . f(i) + \cdots$$
$$\cdots + A_{n-1}^{(n)}(i+2)\ldots(i+n)\triangle^n . f(i)],$$

wo $(-1)^{n-1} A_{n-1}^{(n)} = 1$ sein mufs, die übrigen A aber gewisse ganze Zahlen sind, welche zu ermitteln bleiben. Unterwirft man zu diesem Zwecke die letzte Formel nochmals der Operation D und vergleicht den so erhaltenen Ausdruck für $\overset{n+1}{\mathrm{D}} f(i)$ mit dem, welchen die letzte Formel giebt, wenn man darin $n+1$ statt n setzt, so erhält man folgende Relationen:

$$\text{(b.)} \quad \begin{cases} A_1^{(n+1)} = 2A_1^{(n)} - 1, \\ A_2^{(n+1)} = 3A_2^{(n)} - A_1^{(n)}, \\ A_3^{(n+1)} = 4A_3^{(n)} - A_2^{(n)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n^{(n+1)} = \qquad -A_{n-1}^{(n)}. \end{cases}$$

Fügt man zu diesen Gleichungen noch die Bedingung hinzu

$$\text{(c.)} \qquad (-1)^{n-1} A_{n-1}^{(n)} = 1$$

für jedes n, so sind die Coefficienten A vollkommen bestimmt.

Setzt man nun

$$A_r^{(n+1)} = \frac{1}{1.2\ldots r} N_r^{(n)},$$

so geht das System (b.) in das System (I.) über. Folglich genügt dieser Werth von $A_r^{(n+1)}$ dem System (b.); zugleich genügt er der Gleichung (c.) und ist mithin der gesuchte Werth der Coefficienten A. Da diese Coefficienten ganze Zahlen sein müssen, so ersieht man zugleich, dafs die Zahl $N_i^{(n)}$ für jedes n durch $1.2\ldots i$ theilbar sein mufs.

Der Ausdruck für $\overset{n}{\mathrm{D}} f(i)$ wird hiermit:

$$\text{(IV.)} \qquad \overset{n}{\mathrm{D}} f(i) = (-1)^{n-1} \sum_{r=1}^{r=n} \frac{(i+2)(i+3)\ldots(i+r)}{1.2\ldots(r-1)} N_{r-1}^{(n-1)} \triangle^r . f(i),$$

wo der Coefficient $\frac{(i+2)\dots(i+r)}{1\dots\dots(r-1)} = (-1)^{r-1}\binom{-i-2}{r-1}$ für $r=1$ der Einheit gleich zu setzen ist.

Ist z. B. $f(i) = \frac{1}{i}$, also $\Delta^r.f(i) = \frac{1.2\dots r}{i(i+1)\dots(i+r)}$, $\overset{n}{\mathrm{D}}f(i) = \frac{1}{i(i+1)}$, so giebt diese Formel

$$\sum_{r=1}^{r=n} r N_{r-1}^{(n-1)} = (-1)^{n-1}$$

oder in Verbindung mit Gleichung (2.)

$$(4.) \qquad \sum_{r=1}^{r=n} r N_r^{(n)} = (-1)^n.$$

Für $i=0$ erhält man aus Gleichung (IV.) statt der in Gleichung (II.) enthaltenen Summe folgenden anderen Ausdruck für $(\overset{n}{\mathrm{D}}f(i))_{i=0}$:

$$(\text{V.}) \qquad (\overset{n}{\mathrm{D}}f(i))_{i=0} = (-1)^{n-1}\sum_{r=1}^{r=n} r N_{r-1}^{(n-1)}(\Delta^r.f(i))_{i=0}.$$

No. 4. Wenden wir nun die vorhergehenden Formeln auf die *Bernoulli*schen Zahlen an. Setzt man $f(i) = \frac{1}{i+1}$, so wird

$$\Delta^r.f(i) = \frac{1.2\dots r}{(i+1)\dots(i+r+1)}$$

und folglich Gleichung (IV.)

$$\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1} = (-1)^{n-1}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{r}{(i+1)(i+r+1)}N_{r-1}^{(n-1)}$$

oder, da $\frac{r}{(i+1)(i+r+1)} = \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+r+1}$ ist, und $\frac{1}{i+1}\sum_{r=1}^{r=n} N_{r-1}^{(n-1)}$ vermöge Gleichung (2.) Null ist,

$$(5.) \qquad \overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1} = (-1)^n\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r+i+1}N_{r-1}^{(n-1)}.$$

Für $i=0$ hat man

$$(5'.) \qquad \left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=0} = (-1)^n\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{r+1}N_{r-1}^{(n-1)},$$

und diese Gleichung verglichen mit Gleichung (1.) giebt

$$(\text{VI.}) \qquad \begin{cases} \left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=0} = (-1)^{\frac{1}{2}n-1}B_{n-1}, & \text{wenn } n \text{ gerade} \\ \phantom{\left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=0}} = 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Gleichung (1.) gilt von $n=1$ an, mithin diese von $n=2$ an.

Aus Gleichung (II.) hätte man erhalten

$$(5''.) \qquad \left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=0} = \sum_{r=0}^{r=n}\frac{1}{r+1}N_r^{(n)}.$$

Dafs diese Gleichung mit (5'.) in Uebereinstimmung ist, läfst sich leicht direct zeigen; denn aus dem System (I.) ergiebt sich sogleich

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{1}{i+1}N_i^{(n)} = \sum_0^{n-1}N_i^{(n-1)} - \sum_1^n\frac{i}{i+1}N_{i-1}^{(n-1)} = \sum_1^n N_{i-1}^{(n-1)} - \sum_1^n\frac{i}{i+1}N_{i-1}^{(n-1)},$$

folglich

$$\sum_0^n\frac{1}{i+1}N_i^{(n)} = \sum_i^n\frac{1}{i+1}N_{i-1}^{(n-1)},$$

wie auch aus der Vergleichung der beiden Gleichungen (5'.) und (5''.) für gerade n sich ergiebt. Für ungerade n sind beide Reihen gleich Null.

Die Gleichung (III.) giebt für $f(i) = \frac{1}{i+1}$

$$\sum_1^n\frac{1}{i+1}N_i^{(n)} = -\tfrac{1}{2} - 2\left[\overset{1}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1} + \cdots + \overset{n-1}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right]_{i=1},$$

also

$$\sum_0^n\frac{1}{i+1}N_i^{(n)} = \quad \tfrac{1}{2} - 2\left[\overset{1}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1} + \cdots + \overset{n-1}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right]_{i=1} = \left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=0}$$

und vermöge der Gleichung (VI.) folgert man hieraus von $\overset{2}{\mathrm{D}}$ an

$$(\text{VII.}) \qquad \begin{cases} 2\left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=1} = (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}B_n, \\ 2\left(\overset{n+1}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=1} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}B_n, \end{cases}$$

wenn n eine ungerade Zahl bezeichnet.

Schreibt man also die Zahlenreihe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ..., nimmt hiervon die Differenzen, multiplicirt dieselben der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, ..., bildet hierauf wieder die Differenzen, multiplicirt dieselben wieder der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, ... u. s. w., so sind, von der zweiten Differenzenreihe an, die ersten Glieder der Differenzenreihen abwechselnd Null und die *Bernoulli*-Zahlen, die zweiten Glieder die Hälfte der *Bernoulli*schen Zahlen abwechselnd positiv und negativ genommen. Das allgemeine Gesetz, nach welchem die $(i+1)^{\text{ten}}$ Glieder der Differenzenreihen gebildet sind, ist durch Gleichung (5.) gegeben, läfst sich aber auch wie folgt mittelst der Anfangsglieder der Reihen darstellen.

Schreibt man der Kürze halber $\overset{n}{\underset{i'}{\mathrm{D}}}$ für $\left(\overset{n}{\mathrm{D}}\frac{1}{i+1}\right)_{i=i'}$, so giebt die Gleichung (a.) No. 3

$$\overset{n+1}{\underset{i}{\mathrm{D}}} = (i+1)\overset{n}{\underset{i}{\mathrm{D}}} - (i+2)\overset{n}{\underset{i+1}{\mathrm{D}}}.$$

Hieraus folgt

$$2\overset{n}{\underset{1}{\mathrm{D}}} = \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{D}}} - \overset{n+1}{\underset{0}{\mathrm{D}}},$$

$$3\overset{n}{\underset{2}{\mathrm{D}}} = \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{D}}} - (1+\tfrac{1}{2})\overset{n+1}{\underset{0}{\mathrm{D}}} + \frac{1}{1.2}\overset{n+2}{\underset{0}{\mathrm{D}}},$$

$$4\overset{n}{\underset{3}{\mathrm{D}}} = \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{D}}} - (1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3})\overset{n+1}{\underset{0}{\mathrm{D}}} + \left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.3}\right)\overset{n+2}{\underset{0}{\mathrm{D}}} - \frac{1}{1.2.3}\overset{n+3}{\underset{0}{\mathrm{D}}},$$

. . . .

oder allgemein, wenn man die Summe der Combinationen der Zahlen $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \dots \frac{1}{i}$ zu je m mit $\sigma_{i,m}$ bezeichnet,

$$(6.)\qquad (i+1)\overset{n}{\underset{i}{\mathrm{D}}} = \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{D}}} - \sigma_{i,1}\overset{n+1}{\underset{0}{\mathrm{D}}} + \sigma_{i,2}\overset{n+2}{\underset{0}{\mathrm{D}}} - \dots + (-1)^i\sigma_{i,i}\overset{n+i}{\underset{0}{\mathrm{D}}}.$$

Hieraus lassen sich sogleich neue Relationen für die *Bernoulli*schen Zahlen ableiten. Denn setzt man $n=1$ und bemerkt, dafs

$$(i+1)\overset{1}{\underset{i}{\mathrm{D}}} = (i+1)\left(\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i+2}\right) = \frac{1}{i+2},\qquad \overset{1}{\underset{0}{\mathrm{D}}} = \tfrac{1}{2}$$

ist, die folgenden $\underset{0}{\mathrm{D}}$ aber durch die Gleichung (VI.) gegeben sind, so erhält man aus (6.), je nachdem man darin für i die ungerade Zahl $2i-1$ oder die gerade $2i$ setzt:

$$(7.)\qquad \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2i+1} = \sigma_{2i-1,1}B_1 - \sigma_{2i-1,3}B_3 + \dots + (-1)^{i-1}\sigma_{2i-1,2i-1}B_{2i-1}, \\ \text{oder} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2i+2} = \sigma_{2i,1}\ \ B_1 - \sigma_{2i,3}\ \ B_3 + \dots + (-1)^{i-1}\sigma_{2i,2i-1}\ \ B_{2i-1}. \end{cases}$$

Setzt man aber in (6.) $n=2$, so wird $\overset{2}{\underset{i}{\mathrm{D}}} = \frac{1}{(i+2)(i+3)}$ und man erhält folgende Relationen:

$$(8.)\qquad \begin{cases} \frac{2i-1}{2i(2i+1)} = B_1 - \sigma_{2i-2,2}B_3 + \sigma_{2i-2,4}B_5 - \dots + (-1)^{i-1}\sigma_{2i-2,2i-2}B_{2i-1}, \\ \frac{2i}{(2i+1)(2i+2)} = B_1 - \sigma_{2i-1,2}B_3 + \sigma_{2i-1,4}B_5 - \dots + (-1)^{i-1}\sigma_{2i-1,2i-2}B_{2i-1}, \end{cases}$$

welche auch unmittelbar aus den Relationen (7.) sich ableiten lassen.

No. 5. Unter den anderen Anwendungen, welche man von den Formeln (II.), (III.), (IV.) machen kann, scheint mir folgende Beachtung zu verdienen.

Man setze $f(i) = (i+1)(i+2)\dots(i+k)$, so wird

$$\Delta^r.f(i) = (-1)^r k(k-1)\dots(k-r+1).(i+r+1)\dots(i+k)$$

und

$$\overset{n}{\mathrm{D}}f(i) = (-k)^n.(i+2)\dots(i+k).$$

Mithin wird Gleichung (IV.), wenn man den Factor $(i+2)\dots(i+k)$ auf beiden Seiten weghebt,

$$\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{r-1}\frac{(k-1)(k-2)\dots(k-r+1)}{1.2\dots(r-1)}N_{r-1}^{(n-1)} = k^{n-1}.$$

Setzt man hierin $n+1$ statt n und $r+1$ statt r, so hat man

$$\text{(VIII.)} \quad \sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{k-1}{r}N_r^{(n)} = k^n,$$

wo $\binom{k-1}{r}$ den r^{ten} Binomialcoefficienten der $(k-1)^{\text{ten}}$ Potenz bezeichnet.

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar neue Formeln für die Differenzen und die Summe von k^n; nämlich für die m^{te} Differenz

$$\text{(IX.)} \quad \sum_{r=m}^{r=n}(-1)^{r-m}\binom{k-1}{r-m}N_r^{(n)} = \Delta^m.k^n$$

und für die Summe

$$\text{(X.)} \quad \sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{k}{r+1}N_r^{(n)} = 1^n+2^n+3^n+\dots+k^n = S.k^n.$$

Diese Summenformel, welche aus k Gliedern besteht, wenn $k<n+1$, und aus $n+1$ Gliedern, wenn $k>n+1$, hat vor der gewöhnlich gebrauchten, nach Potenzen von k geordneten Formel den Vorzug, dafs sie nach einem einfacheren Gesetz gebildet ist, ganz ähnlich dem für die Differenzen von k^n aufgestellten, zweitens, dafs jedes ihrer Glieder eine ganze Zahl ist, da die Coefficienten N ganze Zahlen sind, und endlich, dafs man unmittelbar ebenso einfache Formeln für die zweiten und höheren Summen aufstellen kann. Denn setzt man $S.1^n+S.2^n+\dots+S.k^n = S^{(2)}.k^n$ u. s. w., so hat man für die i^{te} Summe

$$\text{(XI.)} \quad \sum_{r=0}^{r=n}(-1)^r\binom{k+i-1}{r+i}N_r^{(n)} = S^{(i)}.k^n.$$

Z. B. für $n=4$ ist $N_1^{(4)}=-15$, $N_2^{(4)}=+50$, $N_3^{(4)}=-60$, $N_4^{(4)}=+24$; also

$$1^4+2^4+\cdots+10^4 = S.10^4 = \binom{10}{1}+15\binom{10}{2}+50\binom{10}{3}+60\binom{10}{4}+24\binom{10}{5} = 25333,$$

$$S^{(3)}.10^4 = \binom{12}{3}+15\binom{12}{4}+50\binom{12}{5}+60\binom{12}{6}+24\binom{12}{7} = 121693.$$

No. 6. Macht man dieselbe Substitution $f(i)=(i+1)(i+2)\dots(i+k)$ in Gleichung (II.), so erhält man, wenn man r statt i schreibt,

$$\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(r+1)(r+2)\dots(r+k)}{1.2\dots k}N_r^{(n)} = (-k)^n,$$

eine Formel, welche nur zeigt, dafs die Formel (VIII.) auch für negative k gilt. Denn setzt man in (VIII.) $-k$ statt k, so wird

$$\sum_{r=0}^{r=n}\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)}{1.2\dots r}N_r^{(n)} = (-k)^n,$$

eine Formel, welche von der vorigen nicht verschieden ist, indem für jeden Werth von k und r die Coefficienten von $N_r^{(n)}$ in den beiden Summen gleich sind. Ueberhaupt aber überzeugt man sich leicht, dafs die Gleichung (VIII.), welche nach der Herleitung für jede ganze Zahl k gültig ist, identisch sein mufs und für jeden Werth von k gilt. Entwickelt man nun die Summe in (VIII.) nach Potenzen von k, so giebt die Vergleichung der Coefficienten der einzelnen Potenzen von k auf beiden Seiten der Gleichung Relationen zwischen den Gröfsen $N^{(n)}$. Setzt man

$$1+2+\cdots+i = s_{i,1}, \quad 1.2+1.3+\cdots+(i-1)i = s_{i,2}, \quad \text{u. s. f.},$$

so dafs $s_{i,r}$ die Summe der Combinationen der Zahlen 1, 2, ... i zu je r bezeichnet, so findet man

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{N_n^{(n)}}{1.2\dots n} = (-1)^n, \\[2ex] \dfrac{N_{n-1}^{(n)}}{1\dots(n-1)} + s_{n,1}\cdot\dfrac{N_n^{(n)}}{1\dots n} = 0, \\[2ex] \dfrac{N_{n-2}^{(n)}}{1\dots(n-2)} + s_{n-1,1}\cdot\dfrac{N_{n-1}^{(n)}}{1\dots(n-1)} + s_{n,2}\cdot\dfrac{N_n^{(n)}}{1\dots n} = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{N_r^{(n)}}{1\dots r} + s_{r+1,1}\cdot\dfrac{N_{r+1}^{(n)}}{1\dots(r+1)} + s_{r+2,2}\cdot\dfrac{N_{r+2}^{(n)}}{1\dots(r+2)} + \cdots + s_{n,n-r}\cdot\dfrac{N_n^{(n)}}{1\dots n} = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Relationen ersieht man wieder, wie wir schon früher fanden, dafs $\dfrac{N_r}{1\dots r}$ immer eine ganze Zahl ist; ferner zieht man aus ihnen aufser dem be-

kannten Werth von $N_n^{(n)}$

$$(10.)\quad \begin{cases} N_{n-1}^{(n)} = (-1)^{n-1}.1.2\ldots(n-1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}, \\ N_{n-2}^{(n)} = (-1)^{n-2}.1.2\ldots(n-2)\cdot\frac{(n-1)n(n+1)(3n-2)}{2.3.4}, \\ \text{u. s. f.} \end{cases}$$

No. 7. Da die Gleichung (VIII.) für jeden Werth von k gilt, so kann man darin $k=\frac{x}{\Delta x}$ setzen, und erhält sodann

$$(\text{XII.})\quad x^n = N_0^{(n)}\Delta x^n - N_1^{(n)}\frac{x-\Delta x}{1}\Delta x^{n-1} + N_2^{(n)}\frac{(x-\Delta x)(x-2\Delta x)}{1.2}\Delta x^{n-2} - \cdots$$
$$\cdots + (-1)^n N_n^{(n)}\frac{(x-\Delta x)\ldots(x-n\Delta x)}{1\ldots n}$$

und hieraus für $\Delta^i.x^n$, wenn man nun die Differenz in dem Sinne versteht, wie es in der Differenzenrechnung gebräuchlich ist, so dafs

$$\Delta.x^n = (x+\Delta x)^n - x^n$$

bezeichnet,

$$(\text{XIII.})\quad (-1)^n\Delta^i.x^n$$
$$= N_n^{(n)}\frac{(x-\Delta x)\ldots(x-(n-i)\Delta x)}{1.2\ldots(n-i)}\Delta x^i - N_{n-1}^{(n)}\frac{(x-\Delta x)\ldots(x-(n-i-1)\Delta x)}{1.2\ldots(n-i-1)}\Delta x^{i+1} +$$
$$\cdots + (-1)^{n-i-1}N_{i+1}^{(n)}\frac{x-\Delta x}{1}\Delta x^{n-1} + (-1)^{n-i}N_i^{(n)}\Delta x^n$$

oder auch, wenn man zuerst in der Formel für x^n das Zeichen von Δx wechselt und dann die Differenzen nimmt,

$$(-1)^n\Delta^i.x^n =$$
$$N_n^{(n)}\frac{(x+(i+1)\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}{1\ldots(n-i)}\Delta x^i + N_{n-1}^{(n)}\frac{(x+(i+1)\Delta x)\ldots(x+(n-1)\Delta x)}{1\ldots(n-i-1)}\Delta x^{i+1} + \cdots$$
$$\cdots + N_{i+1}^{n}\frac{x+(i+1)\Delta x}{1}\Delta x^{n-1} + N_i^{(n)}\Delta x^n.$$

Ebenso erhält man für die Summe Σx^n, das Zeichen Σ in dem in der Differenzenrechnung gebräuchlichen Sinne genommen:

$$(\text{XIV.})\,(-1)^n\Sigma x^n = N_n^{(n)}\frac{x(x+\Delta x)\ldots(x+n\Delta x)}{1.2\ldots(n+1).\Delta x} + N_{n-1}^{(n)}\frac{x(x+\Delta x)\ldots(x+(n-1)\Delta x)}{1\ldots n} + \cdots$$
$$\cdots + N_1^{(n)}\frac{x(x+\Delta x)}{1.2}\Delta x^{n-2} + N_0^{(n)}x\Delta x^{n-1}.$$

Aehnliche Formeln ergeben sich für die höheren Summen.

München, im Juli 1860.

Ueber totale und partielle Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Natani.*)

---

§. 1.
Einleitung.

Pfaff fand bekanntlich die Integration der totalen Differentialgleichungen mit mehr als zwei Veränderlichen, welche die Integrabilitäts-Bedingungen nicht erfüllen, und löste damit zugleich das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Jacobi fand für das Verfahren, welches *Pfaff* anwandte, eine Vereinfachung, die namentlich für die partiellen Differentialgleichungen von der gröfsten Wichtigkeit ist, dafs nämlich im allgemeinen Falle die n Systeme von Differentialgleichungen, deren Integration *Pfaff* verlangt, sich unabhängig von einander aufstellen und integriren lassen (§. 12 der Abhandlung: zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Bd. 17, S. 97 dieses Journals); im Falle der partiellen Differentialgleichungen verschwinden dann diese Systeme bis auf eins.

In einer anderen Abhandlung (zur Theorie der Variationsrechnung und der Differentialgleichungen, Bd. 17, S. 68 dieses Journals) deutet *Jacobi* noch andere Vortheile an, zunächst für diejenigen partiellen Differentialgleichungen, welche zur Lösung der mechanischen Aufgaben dienen. Diese Vortheile, die sich auch als die Erweiterung der *Lagrange*schen Methode der Auflösung partieller Differentialgleichungen auffassen lassen, bestehen darin, dafs die Auffindung *eines* Integrals einer mechanischen Aufgabe ungefähr dieselben Vortheile gewährt, als wären bei einem gewöhnlichen System von Differentialgleichungen zwei Integrale bekannt. Den Beweis und die Art seines Verfahrens hat *Jacobi* nirgends durch den Druck veröffentlicht, er hat zwar, wie ich nachträglich erfahre, in Vorlesungen Mittheilungen darüber gemacht, doch waren mir diese Mittheilungen zur Zeit der Abfassung dieser Abhandlung unbekannt.

Hierzu kommen dann noch diejenigen Vortheile, welche das gleichzeitige Bekanntsein *zweier* Integrale der mechanischen Gleichungen gewährt, Vortheile, mittelst welcher unter Umständen alle übrigen Integrale gefunden werden können. Diese Theorie von zwei gleichzeitig bekannten Integralen

(der sogenannte *Poisson*sche Satz, der aber in dieser Darstellung und Ausführung ganz *Jacobis* Eigenthum ist) ist wiederholentlich von *Jacobi* in Vorlesungen mitgetheilt.

Die weitere Verfolgung der *Jacobi*schen Principien zeigt nun, dafs diese Vortheile, welche die Kenntnifs eines oder zweier Integrale gewähren, nicht auf die mechanischen, selbst nicht auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung beschränkt sind, sondern für die allgemeine *Pfaff*sche Gleichung ebenfalls gelten; dafs ferner, wenn man, mit einigen nothwendigen Veränderungen, von der *Pfaff*schen Darstellungsweise ausgeht, diese ganze Theorie einer sehr einfachen und klaren Darstellungsweise fähig ist. Verbindet man hiermit noch einige Sätze über Differentialgleichungen, so ergiebt sich eine vollständige Theorie der totalen und der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Diese mitzutheilen ist in der vorliegenden Abhandlung beabsichtigt. Im Anfange derselben mufste auf einige elementare Betrachtungen zurückgegangen werden, deren man zu dem Folgenden bedurfte; der weitere Verlauf der Abhandlung enthält die Theorie der *Pfaff*schen und der Schlufs die der partiellen Differentialgleichungen. — Ich bemerke noch, dafs mir die Hefte zweier *Jacobi*schen Vorlesungen bekannt gewesen sind, in welchen die Integration der partiellen, nicht aber der totalen (*Pfaff*schen) Differentialgleichungen behandelt ist.

§. 2.

Hauptintegrale eines Systems von Differentialgleichungen.

Integral eines Systems von Differentialgleichungen heifst im engeren Sinne bekanntlich jede Function der Variablen, welche einer Constanten gleich ist. Ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung mit $n+1$ Variablen hat n Integrale, d. h. man kann nur n von einander unabhängige Functionen der Variablen finden, welche Constanten gleich sind. Iede andere Function der Variablen, die einer Constanten gleich ist, ist eine Function von diesen n Integralen. Es lassen sich die n Integrale auf unendlich viele Arten bestimmen, grofse Vortheile gewährt jedoch ein gewisses System von n Integralen, welche *Hauptintegrale* heifsen mögen, und welche bei Gelegenheit der Integration der partiellen Differentialgleichungen von *Jacobi* in ihren Haupteigenschaften betrachtet worden sind.

Man bestimmt die Hauptintegrale auf folgende Weise. Es seien

$$\varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \ldots \quad \varphi_n = a_n$$



n beliebige, aber von einander unabhängige Integrale, wo also die a Constanten, die φ Functionen der $n+1$ Variablen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ sind. Setzt man *eine* der letzteren, etwa x, gleich Null oder gleich einer beliebigen Zahl, so kann man sich die Gleichungen $\varphi_1 = a_1, \varphi_2 = a_2, \ldots \varphi_n = a_n$ nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ aufgelöst denken, und erhält dann die x ausgedrückt durch die a. Diese Werthe bezeichne man mit $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, also

$$x'_1 = \psi_1(a_1, a_2, \ldots a_n),$$
$$x'_2 = \psi_2(a_1, a_2, \ldots a_n)$$
u. s. w.

Setzt man nun in den Functionen ψ für die a wieder die φ, so werden die x' Functionen der x, und diese Functionen sind die betrachteten Hauptintegrale, — als Functionen der a sind sie Constanten gleich. Die Hauptintegrale sind also die Werthe von $x_1, x_2, \ldots x_n$ für einen gegebenen Werth von x.

Diese Betrachtung läfst sich sogleich auf ein System von Differentialgleichungen ausdehnen, welches mehr als *eine* unabhängige Variable enthält. Man habe n Gleichungen von der Form

$$\Sigma_s X_s dx_s = \Sigma_r Y_r dy_r$$

wo die linke Seite aus n, die rechte aus p Gliedern bestehe, und die X und Y Functionen aller x und y sind. Wir nehmen ferner an, diese n Gleichungen haben n Integrale, d. h. sie seien durch Differentiation von n Gleichungen mit n Constanten entstanden, eine Annahme, welche die Erfüllung gewisser Bedingungsgleichungen für die X und Y nöthig macht, so kann man p Variable, also etwa $y_1, y_2, \ldots y_p$ als unabhängige Variable betrachten. —

Die Integration erfolgt nun in weit zweckmäfsigerer Weise als gewöhnlich geschieht, wenn man die Hauptintegrale einführt. Man denke sich zunächst $y_2, y_3, \ldots y_p$ constant, so hat man das System

$$\Sigma X dx = Y_1 dy_1$$

zu integriren, also n Gleichungen mit $n+1$ Variablen. Man setze nach der Integration $y_1 = 0$ und bestimme die Hauptintegrale $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$, so sind diese Functionen von den x und von $y_2, y_3, \ldots y_p$. In den X und Y setze man $x'_1, x'_2, \ldots x'_n$ für $x_1, x_2, \ldots x_n$ und 0 für y_1, lasse aber $y_2, y_3, \ldots y_p$ ungeändert, dann mögen sich diese Ausdrücke in X', Y' verwandeln.

Dies in die gegebenen Gleichungen eingesetzt, und $y_3, y_4, \dots y_p$ constant gedacht, hat man Gleichungen von der Form

$$\Sigma X' dx' = Y_2' dy_2.$$

Nach der Integration setze man $y_2 = 0$, und erhalte für $x_1', x_2', \dots x_n'$ die Werthe $x_1'', x_2'', \dots x_n''$ als Hauptintegrale dieses Systems; nach Einsetzung dieser Werthe mögen die Gröfsen X', Y' in X'' Y'' übergehen, es ist dann das System

$$\Sigma X'' dx'' = Y_3'' dy_3$$

zu integriren. Die Hauptintegrale desselben für $y_3 = 0$, seien $x_1''', x_2''', \dots$ u.s.w. Fährt man in dieser Weise fort, so kommt man schliefslich auf das System

$$\Sigma X^{(p-1)} dx^{(p-1)} = Y_p^{(p-1)} dy_p.$$

Die Integrale dieses Systems sind dann zugleich die des gegebenen $\Sigma X dx = \Sigma Y dy$. Führt man noch die Hauptintegrale $x^{(p)}$ dieses letzten Systems ein, so sind dies die Werthe der Variablen x, wenn $y_1, y_2, \dots y_p$ gleich Null oder gleich anderen gegebenen Zahlen werden. Diese Integrale $x^{(p)}$ sollen ***Hauptintegrale des gegebenen Systems*** $\Sigma X dx = \Sigma Y dy$ heifsen. Ihre Einführung gewährt den Vortheil, dafs alle zu integrirenden Systeme

$$\Sigma X dx = Y_1 dy_1,\ \Sigma X' dx' = Y_2' dy_2,\ \dots\ \Sigma X^{(p-1)} dx^{(p-1)} = Y_p^{(p-1)} dy_p$$

gleichzeitig aufgestellt und integrirt werden können; schliefslich sind dann die Hauptintegrale jedes Systems als Variable in das folgende einzuführen. Bei der gewöhnlichen Integrationsmethode verlangt die Aufstellung eines jeden Systems erst die Integration der vorhergehenden. —

Als Beispiel nehmen wir eine Gleichung mit drei Variabeln, welche die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Sei dieselbe:

$$f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz = 0,$$

so integrirt man von einander unabhängig die beiden Gleichungen

$$f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy = 0,$$
$$f_1(x', 0, z)\, dx' + f_3(x', 0, z)\, dz = 0;$$

in der ersten wird z constant gedacht, und x' ist das Hauptintegral derselben.

§. 3.

Indices eines Systems von Differentialgleichungen.

Unter ***Index*** eines Systems von n Differentialgleichungen soll eine Variable verstanden werden, die in $n-1$ Integralen nicht vorkommt, und nach



Auffindung derselben sich durch blofse Quadratur ergiebt. Haben die n Gleichungen des Systems die Form $\Sigma X dx + U dt = 0$, wo X und U Functionen der x nicht aber von t sind, so ist t ein Index, denn nach Elimination von dt hat man noch $n-1$ Gleichungen, deren Integrale sämmtliche x als Functionen von einer dieser Gröfsen bestimmen. Diese Werthe in X und U gesetzt geben $t = -\int \frac{\Sigma X dx}{U}$. Auch wenn die Gleichungen die Form haben: $A \Sigma X dx + U dt = 0$, wo A eine Function von t allein ist, ist t ein Index, denn es ergiebt sich schliefslich: $\int \frac{dt}{A} = \int \frac{\Sigma X dx}{U}$. Durch Elimination des Index wird jedes System um eine Ordnung reducirt.

Es seien jetzt n Gleichungen mit $n+p$ Variablen gegeben, welche n Integrale haben, so kann ein solches System p von einander unabhängige Indices enthalten, das heifst es können p Variable so beschaffen sein, dafs sie in $n-p$ Integralen nicht vorkommen, und nach Auffindung derselben sich durch Quadratur ergeben. Dies ist z. B. der Fall bei einem Systeme von n Gleichungen, deren jede die Gestalt hat:

$$\Sigma X dx + U_1 dt_1 + U_2 dt_2 + \cdots + U_p dt_p = 0,$$

wo die X und U nur die x, nicht die t enthalten. Hat man, nach Elimination der dt $n-p$ Differentialgleichungen erhalten, und diese nach der in §. 2 angegebenen Art integrirt, so kann man sämmtliche x als Functionen von p derselben, $x_1, x_2, \ldots x_p$, und von Constanten bestimmen. Wenn man diese Werthe in die anfänglichen Gleichungen einsetzt, erhält man p Gleichungen von der Form:

$$dt_n = Q_1 dx_1 + Q_2 dx_2 + \cdots + Q_p dx_p,$$

wo die Q die $x_1, x_2, \ldots x_p$ und Constanten enthalten. Da nun der Ausdruck rechts nur von einander unabhängige Variable enthält und gleich dt_n ist, so mufs er ein vollständiges Differential sein, t_s ergiebt sich mithin durch p Quadraturen, am bequemsten mit Anwendung des §. 2. Man findet zunächst: $t = \int_0^{x_1} Q_1 dx_1 + t'$, wo t' die Integrationsconstante ist, welche $x_2, \ldots x_p$ enthält, dann: $t' = \int_0^{x_2} Q'_2 dx_2 + t''$, wo Q'_2 dadurch aus Q_2 entsteht, dafs $x_1 = 0$ gesetzt wird, u. s. w.; schliefslich erhält man:

$$t = \int_0^{x_1} Q_1 dx_1 + \int_0^{x_2} Q'_2 dx_2 + \int_0^{x_3} Q''_3 dx_3 + \cdots + \int_0^{x_p} Q_p^{(p-1)} dx_p,$$

wo im zweiten Integral $x_1 = 0$, im dritten $x_1 = x_2 = 0$ u. s. w., im letzten $x_1 = x_2 = \cdots = x_{p-1} = 0$ gesetzt ist.

In der ganzen Entwicklung ändert sich nichts, wenn n Gleichungen von der Form

$$A\Sigma X dx + U_1 dt_1 + \cdots + U_p dt_p = 0$$

gegeben sind, wo A eine Function von t_1 allein ist, die in allen Differentialgleichungen vorkommt; denn nach der Elimination von t_1 nehmen die Gleichungen die frühere Gestalt an, und dt_1 folgt aus einer Gleichung: $\frac{dt_1}{A} = \Sigma Q dx$, die wie oben behandelt wird, wenn man $\tau = \int \frac{dt_1}{A}$ für t_1 setzt.

§. 4.

Ueber eine Differentialgleichung mit mehr als zwei Variablen, welche die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllt. (*Pfaff*sche Gleichung.)

Damit n Gleichungen mit $n+p$ Variablen n Integrale haben, sind gewisse Bedingungen zu erfüllen. Ist nämlich

$$\Sigma X dx = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \cdots + Y_p dy_p$$

eine der Gleichungen, so kann man daraus p Gleichungen von der Form $\Sigma X \frac{\partial x}{\partial y_s} = Y_s$ bilden, es giebt mithin np solcher Gleichungen, aus diesen bestimmt man die np Ausdrücke $\frac{\partial x_r}{\partial y_s}$; nimmt man zwei derselben $\frac{\partial x_r}{\partial y_s}$, $\frac{\partial x_r}{\partial y_{s'}}$, differentiirt den ersten nach $y_{s'}$, den zweiten nach y_s, so müssen beide Werthe gleich sein, dies ist *eine* Bedingungsgleichung, und es zeigt sich leicht, dafs es deren $\frac{1}{2}np(p-1)$ giebt. Sind dieselben nicht erfüllt, so mufs das System mehr als n Integrale haben.

Beschränken wir uns auf *eine* Gleichung mit n Variablen, bei welcher wir es dahin gestellt sein lassen, ob sie die Bedingungsgleichungen erfülle oder nicht. Diese Gleichung, welche *Pfaff* zuerst betrachtet hat, heifse *Pfaff*sche Gleichung. Es kommt nun zuerst darauf an, die allgemeinste Auflösung dieser Gleichung zu ermitteln. Da jede Auflösung um so allgemeiner ist, aus je weniger Integralen sie besteht, so haben wir also zu untersuchen, wie viel Integrale wenigstens gegeben sein müssen, um diese Gleichung zu erfüllen.

Es sei

$$(1.) \qquad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_n dx_n = \sum_1^n X dx = 0$$

die gegebene Gleichung, wo die X Functionen der x sind, es seien ferner $t_1, t_2, \ldots t_p, u_1, u_2, \ldots u_q$ beliebige Functionen der x, und $p+q=n$. Nun werde die Unterscheidung der Differentiationszeichen d und ∂ in der Art



eingeführt, dafs d dann zu nehmen ist, wenn die Veränderlichen so von einander abhängig betrachtet werden, wie es die Integralgleichungen der Gleichung $\Sigma X dx = 0$ verlangen, δ aber solche Differentiale andeutet, die als ganz unabhängig von einander betrachtet werden, für welche mithin die Zusammengehörigkeit der x nicht weiter in Betracht kommt, so dafs die Bedeutung des Zeichens δ genau mit der in der Variationsrechnung übereinstimmt. Es ist dann identisch

$$(2.)\qquad \Sigma X\delta x = \Sigma T\delta t + \Sigma U\delta u,$$

wo die T und U durch die folgenden Gleichungen bestimmt sind:

$$T_s = \Sigma X\frac{\partial x}{\partial t_s},\qquad U_s = \Sigma X\frac{\partial x}{\partial u_s}.$$

Damit nun die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ erfüllt werde, müssen alle diejenigen dt und du verschwinden, deren Coefficienten T, U nicht identisch Null sind; die entsprechenden t und u müssen also constant werden. Da wir aber die t und u willkürlich genommen haben, so können wir die Bedeutung dieser Buchstaben so bestimmen, dafs alle $T = 0$ werden; denn wenn dies bei keiner Function der Fall sein sollte, so denken wir uns $p = 0$, ist es bei ***einer*** der Fall, $p = 1$ u. s. w. Es finden also die p Gleichungen statt:

$$(3.)\qquad \Sigma X\frac{\partial x}{\partial t_s} = 0,$$

wo s die Werthe 1, 2, ... p annimmt. Das System der Gleichungen (3.) ist mit (1.) identisch, man kann sich nämlich unter $t_1, t_2, \dots t_p$ die unabhängigen Variablen denken. Die Integrale dieser Gleichungen (1.) oder (3.) sind aber $u_1, u_2, \dots u_q$, denn diese Functionen gleich Constanten gesetzt erfüllen sie.

Um die Auflösung möglichst allgemein zu machen, mufs die Anzahl der u möglichst klein sein. Aus der Gleichung (2.) folgt nun

$$(4.)\qquad \Sigma X\delta x = \Sigma U\delta u$$

oder

$$(4^a.)\qquad X_s = \Sigma U\frac{\partial u}{\partial x_s}.$$

Solcher Gleichungen (4ª.) giebt es n, aus ihnen sollen die Variablen U, u im Ganzen $2q$ bestimmt werden; ist n gerade, so kann also q im Allgemeinen nicht kleiner als $\frac{1}{2}n$ sein, denn im entgegengesetzten Falle würden nach der Elimination der U und u noch Bedingungsgleichungen zwischen den X stattfinden. Ist aber n ungerade, so dienen die Gleichungen (4ª.) zunächst, um $\frac{1}{2}(n+1)$ Factoren U zu bestimmen; da dann die Anzahl der Integrale u auch gleich

$\frac{1}{2}(n+1)$, aber nur $\frac{1}{2}(n-1)$ Gleichungen übrig sind, so ist eins der Integrale ganz wilkürlich zu nehmen. Man hat also identisch:

$$(5.)\qquad \sum_1^{2n} X\delta x = U_1\delta u_1 + U_2\delta u_2 + \cdots + U_n\delta u_n,$$

$$(6.)\qquad \sum_1^{2n+1} X\delta x = \lambda\,\delta\varphi + U_1\delta u_1 + \cdots + U_n\delta u_n,$$

wo φ ganz willkürlich ist. Soll die Anzahl der Integrale U kleiner als n sein, so sind zwischen den X Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Es läfst sich nun leicht zeigen, dafs die unabhängigen Variablen t ganz willkürlich zu nehmen sind, ohne dafs sich die u ändern. Denke man sich nämlich n Gleichungen von der Gestalt:

$$x_s = \Psi_s(t_1, t_2, \ldots t_p, u_1, u_2, \ldots u_q),$$

wo die u die obige Bedeutung haben, die t beliebig sind, so ist

$$\Sigma X\delta x = \Sigma C\delta t + \Sigma B\delta u,$$

wo C und B sich leicht bestimmen lassen. Wegen Gleichung (4.) ist aber auch

$$\Sigma U\delta u = \Sigma C\delta t + \Sigma B\delta u,$$

was nur möglich ist, wenn $B_s = U_s$ und alle $C = 0$ sind. —

§. 5.

Integration der *Pfaff*schen Gleichung, wenn die Anzahl der Variablen gerade ist.

Integriren wir jetzt die Gleichung (5.), in welcher die Anzahl der x gerade ist. Die *Pfaff*sche Erfindung besteht in der höchst glücklichen Wahl der an sich willkürlichen unabhängigen Variablen. Er setzt nämlich

$$U_1 = V.\alpha_1,\quad U_2 = V.\alpha_2,\quad \ldots\quad U_n = V.\alpha_n,$$

wo V allein die erste unabhängige Variable t_1 enthält, und die α ganz davon frei sind. Dies geschieht z. B., wenn man

$$V = \frac{1}{t_1},\quad \alpha_1 = 1,\quad \alpha_2 = \frac{1}{t_2},\quad \alpha_3 = \frac{1}{t_2 t_3},\quad \ldots\quad \alpha_n = \frac{1}{t_2 t_3 \ldots t_n}$$

setzt. Die Gleichung (5.) wird nun mit $A = \frac{1}{V}$ multiplicirt, und man hat, da alle α von t_1 unabhängig sind,

$$(7.)\qquad \Sigma AX\delta x = \Sigma\alpha\delta u$$

und

$$(8.)\qquad \Sigma AX\frac{\partial x}{\partial t_1} = 0.$$

Jede Function der x, die von t_1 unabhängig ist, also, wenn man t_1 als unabhängige Variable betrachtet, constant gedacht werden mufs, bildet ein Integral von

Gleichung (8.). Integrale sind also: $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n, u_1, u_2, \ldots u_n$, (da bei unserer Annahme $\alpha_1 = 1$ war; bei anderen Annahmen wären *sämmtliche* α Integrale, aber eins derselben eine Function der übrigen).

Es soll nun unter ∂ immer das Zeichen der Differentiation nach dem ersten der t, also hier nach t_1 genommen, verstanden werden, während d und δ ihre vorigen Paragraphen festgestellte Bedeutung behalten. Da der Ausdruck rechts in Gleichung (7.) t_1 nicht enthält, ist $\partial(\Sigma A X \delta x) = 0$, und wegen Gleichung (8.), welche identisch wird, wenn man sich unter den x Functionen von t_1 denkt: $\delta(\Sigma A X \partial x) = 0$. Nun ist:

$$\delta(\Sigma A X \partial x) = \Sigma \delta(AX)\partial x + \Sigma A X \partial \delta x$$
$$= A \Sigma \delta X \partial x + \delta A \Sigma X \partial x + \Sigma A X \partial \delta x = A \Sigma \delta X \partial x + \Sigma A X \partial \delta x = 0,$$

da $\delta A \Sigma X \partial x$ wegen (8.) verschwindet. Ferner

$$\partial(\Sigma A X \delta x) = \Sigma A X \partial \delta x + \Sigma \partial(AX)\delta x = 0.$$

Durch Subtraction beider Ausdrücke erhält man:

$$(9.) \qquad \Sigma \partial(AX)\delta x = A \Sigma \delta X \partial x.$$

Da die auf beiden Seiten in $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$ multiplicirten Theile einzeln unter einander gleich sind, so zerfällt diese Gleichung in $2n$ andere:

$$(10.) \quad \begin{cases} \partial(AX_1) = A \Sigma_p \dfrac{\partial X_p}{\partial x_1} \partial x_p, \\ \partial(AX_2) = A \Sigma_p \dfrac{\partial X_p}{\partial x_2} \partial x_p, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \partial(AX_{2n}) = A \Sigma_p \dfrac{\partial X_p}{\partial x_{2n}} \partial x_p, \end{cases}$$

wo die Summe rechts sich auf alle x erstreckt. Es ist aber

$$\partial(AX_p) = A\left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial X_p}{\partial x_2}\partial x_2 + \cdots + \frac{\partial X_p}{\partial x_{2n}}\partial x_{2n}\right) + X_p \partial A,$$

mit Hülfe dieser Gleichungen verwandeln sich die Gleichungen (10.) in

$$(11.) \quad \begin{cases} X_1 \partial A = A \Sigma_p \left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_1} - \dfrac{\partial X_1}{\partial x_p}\right)\partial x_p, \\ X_2 \partial A = A \Sigma_p \left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_2} - \dfrac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)\partial x_p, \\ \cdots\cdots\cdots \\ X_{2n} \partial A = A \Sigma_p \left(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_{2n}} - \dfrac{\partial X_{2n}}{\partial x_p}\right)\partial x_p. \end{cases}$$

Dies ist die gewöhnliche Form. Es ist wichtig schon jetzt zu bemerken, dafs in diesen $2n$ Gleichungen A nur als Index im Sinne des §. 3 vorkommt. — Integrale dieser Gleichungen sind die $2n-1$ Gröfsen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$; $u_1, u_2, \ldots u_n$ oder allgemeiner je $2n-1$ von einander unabhängige Functionen dieser Gröfsen. Zu dieser letzteren allgemeineren Gestalt gelangt man durch wirkliche Integration der Gleichungen (11.), und es kommt nun zur Bestimmung der Gröfsen u auf die Elimination der α an. Dies erfordert jedoch die Auflösung neuer Differentialgleichungen.

Wenn $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1}$ die Integrale der Gleichungen (11.) sind, so ist identisch

$$\Sigma AX\delta x = B_1\delta\beta_1 + B_2\delta\beta_2 + \cdots + B_{2n-1}\delta\beta_{2n-1},$$

denn da die β Functionen der α und u sind, mithin auch die α und u Functionen der β, so nimmt die Gleichung $\Sigma AX\delta x = \Sigma\alpha\delta u$ diese Form an, wenn man $B_s = \Sigma_r \alpha_r \frac{\partial u_r}{\partial \beta_s}$ setzt, die B sind von t_1, oder was dasselbe ist, von A ganz frei. Die Gleichung (1.) des §. 4 geht also über in

$$(12.) \qquad \Sigma B d\beta = 0,$$

wo die B nur Functionen der β sind, also in eine Gleichung mit $2n-1$ Variablen; die allgemeine Lösung derselben erfordert nach §. 4 ein willkürliches Integral $u = \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{2n-1})$, dazu wähle man β_1 selbst, was unbeschadet der Allgemeinheit geschehen darf, da jedes Integral als eine willkürliche Function eines beliebigen Systems anderer Integrale betrachtet werden kann, und setze demgemäfs $u_1 = \beta_1$ einer Constanten gleich. In Gleichung (12.) reducirt sich dadurch die Anzahl der Variablen auf $2n-2$; die Lösung dieser Gleichung geschieht daher mittelst eines Systems von der Form (11.), in welchem jedoch die X, x durch die B, β, und n durch $n-1$ zu ersetzen sind. Durch die Integration dieses Systems tritt dann eine Reduction auf $2n-3$ Variable ein, von welchen eine $u_2 = \gamma$ constant genommen wird; dadurch erhält man eine Differentialgleichung mit $2n-4$ Variablen, u. s. f., bis man auf eine Gleichung mit zwei Variablen kommt, deren Integral u_n sei. Alsdann sind $u_1, u_2, \ldots u_n$ die sämmtlichen Integrale der Gleichung $\Sigma X dx = 0$; um sie zu finden, sind mithin n Systeme von Differentialgleichungen bezüglich von den Ordnungen $2n, 2n-2, \ldots 4, 2$ aufzulösen.

§. 6.

Einführung der Hauptintegrale.

Eine sehr elegante Form nimmt diese Auflösung durch Einführung der Hauptintegrale an. Setzt man nämlich in den Integralen der Gleichungen (11.),

d. h. in den Gröfsen β, $x_1 = 0$, und wird alsdann $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3' \ldots$, so kann man die β durch die Hauptintegrale x_2', x_3', ... ersetzen, und hat

$$\Sigma AX\delta x = \Sigma K\delta x',$$

wo die K an die Stelle der B des vorigen Paragraphen treten, und demgemäfs nur Functionen der x' von A aber frei sind. Ist A' der Werth von A für $x_1 = 0$, so ist also identisch $\Sigma A'X'\delta x' = \Sigma K\delta x'$, mithin

$$(12^a.) \quad \Sigma AX\delta x = \Sigma A'X'\delta x'.$$

Da x_2' an die Stelle von β_1 tritt, so mufs $u_1 = x_2'$ einer Constanten gleich gesetzt werden. Es ist dann die Gleichung $\Sigma X'dx' = 0$, welche (12.) entspricht, zu integriren, deren Variable x_3', x_4', ... x_{2n}' sind. Diese Integration führt auf ein System von $2n-2$ Gleichungen, welches $(11.)_1$ genannt werden möge. Das System $(11.)_1$ geht aus (11.) dadurch hervor, dafs man die beiden ersten Gleichungen von (11.) fortläfst und in den übrigen $x_3 \ldots x_{2n}$, $X_3 \ldots X_{2n}$, A bezüglich durch $x_3' \ldots x_{2n}'$, $X_3' \ldots X_{2n}'$, A_2 ersetzt. Das durch Elimination des Index A_2 reducirte System $(11.)_1$, in welchem x_3' als die erste Variable angesehen wird, habe nun die Hauptintegrale $x_4'' \ldots x_{2n}''$ und der Werth von A_2 für $x_3' = 0$ sei A_2', so hat man in derselben Weise wie oben die Transformation $\Sigma A_2X'\delta x' = \Sigma A_2'X''\delta x''$. Wird hierin x_4'' als erstes Integral genommen, so hat man die Gleichung $\Sigma X''dx'' = 0$ zu integriren, deren Variable $x_5'' \ldots x_{2n}''$ sind. Diese Integration führt auf ein System von $2n-4$ Gleichungen, welches $(11.)_2$ genannt werde. Das System $(11.)_2$ geht aus $(11.)_1$ dadurch hervor, dafs man die beiden ersten Gleichungen von $(11.)_1$ fortläfst und in den übrigen $x_5' \ldots x_{2n}'$, $X_5' \ldots X_{2n}'$, A_2 bezüglich durch $x_5'' \ldots x_{2n}''$, $X_5'' \ldots X_{2n}''$, A_3 ersetzt. Das durch Elimination von A_3 reducirte System $(11.)_2$ habe die Hauptintegrale $x_6''' \ldots x_{2n}'''$ u. s. f. In dieser Weise werden nach einander die Systeme (11.), $(11.)_1$, $(11.)_2$, ... $(11.)_{n-1}$ bezüglich von $2n$, $2n-2$, $2n-4$, ... 2 Differentialgleichungen aufgestellt. Die ersten Variablen dieser Systeme sind x_1, x_3', x_5'', ... $x_{2n-1}^{(n-1)}$, die ersten Hauptintegrale derselben x_2', x_4'', x_6''', ... $x_{2n}^{(n)}$, endlich die Indices A, A_2, A_3, ... A_n. Der Uebereinstimmung wegen schreibe man für den Index A des Systems (11.) A_1, so dafs $A = A_1$ ist, und bezeichne die Werthe, welche A_1, A_2, A_3, ... A_n annehmen, wenn bezüglich x_1, x_3', x_5'', ... $x_{2n-1}^{(n-1)}$ gleich Null gesetzt werden, mit A_1', A_2', A_3', ... A_n', dann ist nach Gleichung (12ª.)

$$\Sigma X\delta x = \frac{A_1'}{A_1}(X_2'\delta x_2' + X_3'\delta x_3' + \cdots),$$

ferner
$$\Sigma X'\delta x' = \frac{A'_2}{A_2}(X''_4\delta x''_4 + X''_5\delta x''_5 + \cdots),$$
u. s. w. Alle diese Umformungen zusammengenommen liefern die identische Gleichung:

$$(13.)\quad \Sigma X\delta x =$$
$$\frac{A'_1}{A_1}X'_2\delta x'_2 + \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}X''_4\delta x''_4 + \frac{A'_1A'_2A'_3}{A_1A_2A_3}X'''_6\delta x'''_6 + \cdot\cdot + \frac{A'_1A'_2A'_3\ldots A'_n}{A_1A_2A_3\ldots A_n}X^{(n)}_{2n}\delta x^{(n)}_{2n}.$$

Mittelst der *Jacobi*schen Methode, die n Systeme von Gleichungen, welche zu integriren sind, neben einander aufzustellen und abgesondert von einander zu integriren, gelingt es also auf diese Weise auch, den durch die Integration reducirten Werth von $\Sigma X\delta x$ bequem darzustellen. Für die unabhängigen Variablen $t_1, t_2, \ldots t_n$ kann man bei dieser Darstellung die Indices $A_1, A_2, \ldots A_n$ oder auch die Factoren $\frac{A'_1}{A_1}, \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}, \ldots \frac{A'_1A'_2\ldots A'_n}{A_1A_2\ldots A_n}$ nehmen. —

Einen noch gröfseren Vortheil gewährt diese Methode, wenn einige der Functionen X, etwa $X_{n+p+1}, X_{n+p+2}, \ldots X_{2n}$ sämmtlich gleich Null werden. Dann hat man, nachdem p Systeme Differentialgleichungen von der Form (11.) integrirt, und die Integrale $x'_2, x''_4, \ldots x^{(p-1)}_{2p-2}$ gewonnen sind, nach abermaliger Integration die Gleichung:

$$(14.)\qquad X^{(p)}_{2p}dx^{(p)}_{2p} + X^{(p)}_{2p+1}dx^{(p)}_{2p+1} + \cdots + X^{(p)}_{n+p}dx^{(p)}_{n+p} = 0$$

übrig. Da nun $p-1$ Integrale gefunden sind, so sind noch $n-p+1$ zu bestimmen, und diese erhält man, wenn $x^{(p)}_{2p}, x^{(p)}_{2p+1}, \ldots x^{(p)}_{n+p}$ (an Anzahl $n-p+1$) gleich Constanten gesetzt werden, wodurch die Gleichung (14.) erfüllt wird.

In diesem Falle sind also die Integrale der Gleichung $\Sigma Xdx = 0$ die folgenden: $x'_2, x''_4, \ldots x^{(p-1)}_{2p-2}, x^{(p)}_{2p}, x^{(p)}_{2p+1}, \ldots x^{(p)}_{n+p}$; man erspart die Auflösung von $n-p$ Systemen, welche bei der im vorigen Paragraphen gegebenen allgemeinen Methode zu bilden wären, und erhält die identische Gleichung:

$$(15.)\quad \Sigma X\delta x = \frac{A'_1}{A_1}X'_2\delta x'_2 + \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}X''_4\delta x''_4 + \cdots + \frac{A'_1A'_2\ldots A'_{p-1}}{A_1A_2\ldots A_{p-1}}X^{(p-1)}_{2p-2}\delta x^{(p-1)}_{2p-2}$$
$$+ \frac{A'_1A'_2\ldots A'_p}{A_1A_2\ldots A_p}(X^{(p)}_{2p}\delta x^{(p)}_{2p} + X^{(p)}_{2p+1}\delta x^{(p)}_{2p+1} + \cdots + X^{(p)}_{n+p}\delta x^{(p)}_{n+p}).$$

§. 7.

Integration der *Pfaff*schen Gleichung bei einer ungeraden Anzahl von Variablen.

Bei einer ungeraden Anzahl von Variablen hatten wir nach §. 4 Gleichung (6.):

$$(16.)\qquad \Sigma X\delta x = \lambda\delta\varphi + \Sigma U\delta u.$$

Da die Anzahl der x hier $2n+1$ ist, so ist die der u gleich n. Setzt man φ gleich einer Constanten a, und eliminirt mittelst der Gleichungen $\varphi = a$, $\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x = 0$ eines der x und das entsprechende δx, so ist die Gleichung (16.) auf den Fall einer Gleichung mit $2n$ Variablen, deren n Integrale u zu finden sind, zurückgeführt. Es lassen sich auch hier die Hauptintegrale einführen und durch diese die Gleichung (16.) transformiren. Statt x_{2n+1} und δx_{2n+1} führe man nämlich φ und $\delta\varphi$ ein, wie dies mittelst der Gleichungen $\varphi(x_1, x_2, \dots x_{n+1}) = \varphi$, $\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x$ geschehen kann, dann wird:

$$\Sigma X\delta x = \Sigma V\delta x + \lambda\delta\varphi,$$

wo

$$V_s = X_s - X_{2n+1}\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}}, \qquad \lambda = X_{2n+1}\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}}.$$

Der Ausdruck $\Sigma V\delta x$ kann in die Form der rechten Seite von Gleichung (13.) gebracht werden. Sind $V', \dots$ die Anfangswerthe der V, sind $V'', \dots$ die Anfangswerthe der V' u. s. w., so kommt:

$$(17.)\quad \Sigma X\delta x = \lambda\delta\varphi + \frac{A'_1}{A_1}V'_2\delta x'_2 + \frac{A'_1A'_2}{A_1A_2}V''_4\delta x''_4 + \dots + \frac{A'_1A'_2\dots A'_n}{A_1A_2\dots A_n}V^{(n)}_{2n}\delta x^{(n)}_{2n}.$$

Hier sind $x'_2, x''_4, \dots x^{(n)}_{2n}$ die ersten Integrale der den Systemen (11.), $(11.)_1, \dots (11.)_{n-1}$ analog gebildeten Gleichungen, die aus jenen entstehen, wenn die X durch die V ersetzt werden, und wenn überdies die Variable x_{2n+1} durch die Gleichung $\varphi = a$ eliminirt wird. In $V, V', V'', \dots$ sowie in den A und A' ist dann a wieder durch φ zu ersetzen.

Die den Systemen (11.), $(11.)_1, \dots$ analog gebildeten Gleichungen nehmen aber in diesem Falle eine symmetrische Form an, die für das Folgende von Wichtigkeit ist. Man hat nämlich nach §. 4 Gleichung (6.) identisch: $\Sigma X\delta x - \lambda\delta\varphi = \Sigma U\delta u$. Nimmt man nun, aus denselben Gründen wie in §. 5, an, dafs die U die erste unabhängige Variable t_1 nur in einem gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{A}$ enthalten, und setzt man $A\lambda = \mu$, so kommt:

$$\Sigma AX\delta x - \mu\delta\varphi = \Sigma\alpha\delta u,$$

wo die α von A unabhängig sind. Nun ergiebt sich wie in §. 5:

$$\delta\{\Sigma AX\partial x - \mu\partial\varphi\} = 0, \quad \partial\{\Sigma AX\delta x - \mu\delta\varphi\} = 0,$$

da aber $\partial\varphi = 0$, $\delta\partial\varphi = 0$, so ergeben diese Gleichungen:

$$A\Sigma X\partial\delta x + \Sigma\partial(AX)\delta x - \partial\mu\delta\varphi = 0$$

und

$$A\Sigma X\partial\delta x+\Sigma\delta(AX)\partial x = 0.$$

Durch Subtraction beider Gleichungen kommt:

$$(18.)\qquad \Sigma\partial(AX)\delta x-\partial\mu\delta\varphi = A\Sigma\delta X\partial x.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung $\Sigma X\partial x = 0$, und in gleicher Weise wie in §. 5, ergiebt sich hieraus:

$$(19.)\qquad \partial(AX_p)-\partial\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_p} = A\Sigma_s\frac{\partial X_s}{\partial x_p}\partial x$$

oder

$$(20.)\quad \begin{cases} X_1\,\partial A = \partial\mu\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}+A\Sigma_p\Big(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_1}-\dfrac{\partial X_1}{\partial x_p}\Big)\partial x_p, \\ X_2\,\partial A = \partial\mu\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}+A\Sigma_p\Big(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_2}-\dfrac{\partial X_2}{\partial x_p}\Big)\partial x_p, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{2n+1}\partial A = \partial\mu\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}+A\Sigma_p\Big(\dfrac{\partial X_p}{\partial x_{2n+1}}-\dfrac{\partial X_{2n+1}}{\partial x_p}\Big)\partial x_p. \end{cases}$$

A und μ haben die Form von Indices. Zu diesen $2n+1$ Gleichungen kommt noch

$$\Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\partial x = 0,$$

und nach Elimination von A und μ hat man $2n$ Gleichungen mit $2n+1$ Variablen. Wegen $\varphi = a$ ist aber *ein* Integral derselben schon bekannt. Setzt man $x_1 = 0$, so erhält man, in Verbindung mit $\varphi = a$, die Hauptintegrale x'_2, x'_3, ... x'_{2n}; es wird dann:

$$\Sigma AX\delta x = A(\lambda\delta\varphi+\Sigma V\delta x) = \mu\delta\varphi+A'\Sigma V'\delta x'.$$

Der Ausdruck $\Sigma V'\delta x'$ enthält $2n-1$ Variable; nimmt man x'_2 constant, so ist dann, zur Bestimmung der übrigen, wieder von den Gleichungen der Form (11.) §. 5 auszugehen, oder, was dasselbe ist, von Gleichungen der Form (20.), in welchen nur die x, X mit den x', V' zu vertauschen und $\partial\mu = 0$ zu setzen ist.

§. 8.

Bedingungen, unter welchen die *Pfaff*sche Gleichung durch weniger Integrale befriedigt wird, als sie im Allgemeinen erfordert.

Fall einer geraden Anzahl von Variablen. Wir haben gesehen, dafs, wenn in der Gleichung $\Sigma X\delta x = \Sigma U\delta u$ die Anzahl der x gleich $2n$ ist, t_1, d. h. die erste Veränderliche, nur als gemeinschaftlicher Factor der U vor-

kommt, mithin aufser den u auch die Verhältnisse $\frac{U_2}{U_1}, \frac{U_3}{U_1}, \ldots \frac{U_n}{U_1}$ Integrale der Gleichungen (11.) sind. Die Anzahl der Gleichungen (11.) ist, nach Elimination von A, gleich $2n-1$, also die Anzahl der Integrale gerade ausreichend, wenn n die Anzahl der u ist. Ist aber die Anzahl der u, also der Integrale der *Pfaff*schen Gleichung, $n-q$, d. h. kleiner als n, so ist die Anzahl der Integrale der Gleichungen (11.) gleich $2n-2q-1$; so grofs ist nämlich dann die Anzahl der u und der aus den U gebildeten Verhältnisse zusammengenommen. Hat aber ein System von $2n-1$ Gleichungen nur $2n-2q-1$ Integrale, so müssen, da sich durch deren Differentiation nur $2n-2q-1$ Gleichungen ergeben, $2q$ der gegebenen Gleichungen (11.) Folgen der übrigen sein, und dies ist die Bedingung dafür, dafs die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ nur $n-q$ Integrale habe.

Drücken wir diese Bedingungen analytisch aus. Die Gleichungen (11.) kann man unter Einführung der *Jacobi*schen Bezeichnung

$$\frac{\partial X_p}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_p} = (p, s)$$

kürzer so schreiben:

$$(21.)\quad \begin{cases} X_1\,\partial A = A\,\Sigma_p(p,1)\,\partial x_p, \\ X_2\,\partial A = A\,\Sigma_p(p,2)\,\partial x_p, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ X_{2n}\partial A = A\,\Sigma_p(p,2n)\,\partial x_{2n}, \end{cases}$$

und es ist:

$$(p, s) = -(s, p), \quad (p, p) = 0.$$

Damit nun in der That $2q$ dieser Gleichungen aus den anderen folgen, mufs

$$(22.)\quad X_r = \Sigma_\varrho \alpha_\varrho^{(r)} X_\varrho, \quad (p, r) = \Sigma_\varrho \alpha_\varrho^{(r)}(p, \varrho)$$

sein, wo r eine der Zahlen $2n, 2n-1, \ldots 2n-2q+1$ vorstellt, p jede Zahl von 1 bis $2n$, wo die Summen sich auf die Werthe 1 bis $2n-2q$ von ϱ erstrecken, und wo die α als die unbekannten Gröfsen zu betrachten sind.

Man hat also, für jeden Werth von r, $2n+1$ Gleichungen, und wenn man aus denselben die α, an Anzahl $2n-2q$, eliminirt, so bleiben $2q+1$ Gleichungen übrig. Da r aber $2q$ verschiedene Werthe haben kann, so erhält man im Ganzen $2q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen.

In §. 4 wurde gezeigt, dafs n Gleichungen mit $n+p$ Variablen, um n Integrale zu haben, $\frac{1}{2}np(p-1)$ Bedingungsgleichungen erfüllen müssen. Setzt man hierin für n und p bezüglich 1 und $2n-1$, so wird diese Anzahl $(2n-1)(n-1)$. Setzt man dagegen in der Formel $2q(2q+1)$, die wir oben erhielten, $n-q=1$, also $q=n-1$, so ergiebt sich $2(2n-1)(n-1)$, also

das Doppelte der ersten Anzahl. Da aber diese beiden Zahlen übereinstimmen müssen, so ist es nothwendig, dafs in diesem besonderen Fall die aus den Gleichungen (22.) geschlossene Anzahl der Bedingungsgleichungen sich auf die Hälfte reducire. Dies gilt aber nicht blos für den besonderen hier vorliegenden Werth von q, sondern es läfst sich ganz allgemein zeigen, dafs, was auch q sei, die Hälfte der $2q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen identisch wird, mithin nur $q(2q+1)$ vorhanden sind. Denn nach der Elimination der α nehmen die Bedingungsgleichungen folgende Form an:

$$(23.)\quad \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,w) & (1,r) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,w) & (2,r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (w,1) & (w,2) & (w,3) & \dots & (w,w) & (w,r) \\ (v,1) & (v,2) & (v,3) & \dots & (v,w) & (v,r) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(23^a.)\quad \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \dots & (1,w) & (1,r) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \dots & (2,w) & (2,r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (w,1) & (w,2) & (w,3) & \dots & (w,w) & (w,r) \\ X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_w & X_r \end{vmatrix} = 0,$$

wo r und v alle Zahlen von $2n-2q+1$ bis $2n$ vorstellen, und $w=2n-2q$ ist.

Von der zunächst anzustellenden Betrachtung bleiben die Gleichungen (23^a.) ausgeschlossen. Da jede der Zahlen r und v in (23.) $2q$ Werthe durchläuft, so stellt (23.) ein System von $(2q)^2$ Gleichungen dar. Unter diesen sind $2q$, in welchen $r=v$ ist. In Berücksichtigung der Gleichung $(p,s)=-(s,p)$ wird in diesem Falle, da die Anzahl der Columnen von (23.) ungerade ist, durch Vertauschung der vertikalen Columnen mit den Horizontalreihen das Vorzeichen der Determinante (23.) geändert, da aber bei einem solchen Vertauschen die Determinante unverändert bleibt, so ist dieselbe identisch Null, d. h. es werden $2q$ der Gleichungen (23.) identisch. In allen $4q^2-2q$ übrigen Gleichungen (23.) ist r von v verschieden, und in je zweien, die durch Vertauschung der Werthe von r und v aus einander entstehen, unterscheiden sich die linken Seiten aus den nämlichen Gründen, die soeben angeführt wurden, nur durch das Zeichen. Als identisch ist daher die Hälfte dieser Gleichungen zu zählen, d. h. $2q^2-q$. Die oben betrachteten $2q$ Gleichungen mitgerechnet, erhält man also $2q^2+q$ identische, und es bleiben mithin von der früher be-

rechneten Anzahl der $2q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen nur die Hälfte, d. h. $q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen übrig.

Fall einer ungeraden Anzahl von Variablen. Es sei nun die Anzahl der x gleich $2n+1$. Bleibt das willkürliche Integral bestehen, so reducirt man vermittelst desselben die Anzahl der Veränderlichen um *eine*, und es finden die obigen Betrachtungen statt.

Soll aber das willkürliche Integral verschwinden, also die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ durch n Integrale befriedigt werden, so ist in den Gleichungen (20.) $\mu = 0$ zu setzen. Bezeichnen wir diesen besonderen Fall der Gleichungen (20.) mit (20^a.), so haben die Gleichungen (20^a.) ganz die Form der Gleichungen (11.), von denen sie sich nur dadurch unterscheiden, dafs ihre Anzahl nicht $2n$ sondern $2n+1$ ist. Nach Elimination von A bleiben von den Differentialgleichungen (20^a.) $2n$ übrig, die durch $2n-1$ Integrale befriedigt werden sollen, also mufs *eine* Differentialgleichung identisch sein. Die Bedingung hierfür wird durch (22.) dargestellt, wenn man darin $r = 2n+1$ setzt und die Summen auf alle Werthe von s von 1 bis $2n$ ausdehnt. Diese Form, die in Rede stehende Bedingung auszudrücken, läfst sich nun wieder durch die Gleichungen (23.) und (23^a.) ersetzen, wenn in diesen Gleichungen $w = 2n$, $r = v = 2n+1$ genommen wird, so dafs jedes der Systeme (23.) und (23^a.) nur eine einzige Gleichung darstellt. Aus den eben angeführten Gründen wird aber Gleichung (23.) identisch, so dafs nur *eine* Bedingungsgleichung für diesen Fall übrig bleibt.

Sollen aufser dem willkürlichen Integrale noch q andere, im Ganzen also $q+1$, wegfallen, so haben die Gleichungen (20^a.) $2n-2q-1$ Integrale, es werden von den Gleichungen (20^a.) $2q+1$ identisch; man erhält in Folge dessen wieder die Bedingungsgleichungen (22.), wenn man für r die Zahlen $2n-2q+1$ bis $2n+1$, für p die Zahlen 1 bis $2n+1$ setzt und die Summen von $t=1$ bis $t=2n+1$ ausdehnt. Diese Gleichungen (22.) lassen sich wieder durch (23.) und (23^a.) ersetzen, wenn $w = 2n-2q$ und für r und v jede der Zahlen $2n-2q+1$ bis $2n+1$ genommen wird. Die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist demnach $(2q+1)(2q+2)$, von denen jedoch aus den oben angeführten Gründen die Hälfte identisch wird, so dafs im Ganzen $(2q+1)(q+1)$ übrig bleiben.

Hat z. B. $\Sigma X dx = 0$ nur *ein* Integral, so müssen die Gleichungen (23.) und (23^a.) die Bedingungen der Integrabilität ergeben, und die Anzahl der-

selben ist bei einer geraden Anzahl $2n$ der x: $(n-1)(2n-1)$, bei einer ungeraden Anzahl $2n+1$ der x: $n(2n-1)$.

§. 9.

Vereinfachung der allgemeinen Methode zur Integration der *Pfaff*schen Gleichung, wenn sie den im vorigen Paragraphen entwickelten Bedingungen genügt.

Da nach Fortfall der identischen Gleichungen und nach Elimination von A in beiden Fällen $2n-2q-1$ Differentialgleichungen (11.) oder (20^a.) übrig bleiben, diese aber im ersten Falle $2n$, im zweiten $2n+1$ Variable enthalten, so müssen, bei gegebenen $2n$ Variablen x, $2q$ derselben, bei gegebenen $2n+1$ Variablen x, $2q+1$ derselben unabhängige Variable sein. Die Gleichungen (11.) oder (20^a.) sind dann nach der in §. 3 gegebenen Methode aufzulösen. Sind $x_1, x_2, \dots x_s$ die unabhängigen Variablen, wo s bezüglich gleich $2q$ oder gleich $2q+1$ ist, so hat man s Systeme von Differentialgleichungen mit $2n-s+1$ Variablen zu integriren, und durch successives Einsetzen der Hauptintegrale für:

$$x_1=0,\ x_1=x_2=0,\ x_1=x_2=x_3=0,\ \dots\ x_1=x_2=x_3=\dots=x_s=0$$

erhält man schliefslich die Hauptintegrale $x_{s+1}^{(s)}, x_{s+2}^{(s)}, \dots$ der Systeme (11.) oder (20^a.). Durch Einsetzen der Werthe $0, 0, \dots 0, x_{s+1}^{(s)}, x_{s+2}^{(s)}, \dots$ für $x_1, x_2, \dots x_s; x_{s+1}, x_{s+2}, \dots$ verwandle sich nun $A, X_{s+1}, X_{s+2}, \dots$ in $A^{(s)}, X_{s+1}^{(s)}, X_{s+2}^{(s)}, \dots$; alsdann wird identisch:

$$\Sigma X\delta x = \frac{A^{(s)}}{A}(X_{s+1}^{(s)}\delta x_{s+1}^{(s)} + X_{s+2}^{(s)}\delta x_{s+2}^{(s)} + \cdots).$$

Die Summe rechts hat immer eine gerade Anzahl von Gliedern, nämlich $2n-2q$, man kann also nach der in §. 6 gegebenen Methode fortfahren, die Reduction auszuführen.

Die bereits geleistete Integration vertritt im Falle einer geraden Anzahl von Variablen die Integration von q Systemen mit je $2n, 2n-2, \dots 2n-2q+2$ Variablen, welche im allgemeinen Falle auszuführen wäre. In unserem Falle waren dagegen $2q$ Systeme jedes mit $2n-2q+1$ Variablen zu integriren, was also eine nambafte Vereinfachung in sich schliefst. Aehnliches findet bei einer ungeraden Anzahl von Variablen statt.

Es ist klar, dafs diese Reduction auch dann einträte, wenn es sich bei irgend einer Aufgabe darum handelte, ein System von Gleichungen von der Form (11.) zu integriren, ohne dafs es auf die Integration der Gleichung $\Sigma X dx = 0$ ankäme.

§. 10.

Vortheile für die Integration der *Pfaff*schen Gleichung, wenn *ein* Integral bekannt ist.

Da man bei der Integration eines Systems von Differentialgleichungen in der Regel ein Integral nach dem andern findet, so fragt es sich, wie sich die Aufgabe vereinfacht, wenn *ein* Integral bekannt ist. Im Allgemeinen bewirkt dies die Reduction des Systems um *einen* Grad. In unserem Falle aber ist der Vortheil ein gröfserer. — Ist die Anzahl der Variablen gerade und *ein* Integral bekannt, so kann dies immer als das erste betrachtet werden. Erinnert man sich an die früher erhaltene Gleichung $\Sigma AX\delta x = \Sigma\alpha\delta u$ und versteht unter u_1 das bekannte Integral, so hat man:

$$\Sigma AX\delta x - \alpha_1\delta u_1 = \alpha_2\delta u_2 + \alpha_3\delta u_3 + \cdots + \alpha_n\delta u_n.$$

Dann folgt ganz wie in §. 7, wenn man an die Stelle der dort mit μ und φ bezeichneten Gröfsen α_1 und u_1 treten läfst,

$$\Sigma\partial(AX)\delta x - \partial\alpha_1\delta u_1 = A\Sigma\delta X\partial x,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich ein System, welches die Form der Gleichungen (20.) hat, nämlich

$$(24.)\quad \begin{cases} X_1\,\partial A = \partial\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + A\Sigma_p(p,1)\,\partial x_p, \\ X_2\,\partial A = \partial\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + A\Sigma_p(p,2)\,\partial x_p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{2n}\partial A = \partial\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n}} + A\Sigma_p(p,2n)\,\partial x_p. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichung $u_1 = \text{Const.}$ und von zweien dieser $2n$ Gleichungen kann man x_1, A, α_1 bestimmen, und hat dann noch $2n-2$ Gleichungen übrig. Die Anzahl der Integrale derselben ist aber $2n-3$, sie sind nämlich: $u_2, u_3, \ldots u_n$, und die Verhältnisse: $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \frac{\alpha_4}{\alpha_2}, \ldots \frac{\alpha_n}{\alpha_2}$, (denn in der Gleichung $\Sigma AX\delta u - \alpha_1\delta u_1 = \alpha_2\delta u_2 + \alpha_3\delta u_3 + \cdots$ kann man sich ganz wie oben die erste unabhängige Veränderliche als gemeinschaftlichen Factor der $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ denken). Es ist also unter den Differentialgleichungen *eine* identisch, und es sind zwei unabhängige Variable in den Gleichungen (24.) vorhanden. Dies ergiebt sich auch schon daraus, dafs der Definition der α zufolge α_1 von A unabhängig ist.

Statt *eines* Systems von $2n-1$ Gleichungen mit $2n$ Variablen, hat man also jetzt *zwei* Systeme von $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen zu integriren, um zu den Integralen von (24.) oder (11.) zu gelangen. Da nun

im allgemeinen Falle, wo ein beliebiges System von $2n$ Differentialgleichungen gegeben ist, erst die Kenntnifs von zwei Integralen das System auf $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen reducirt, so kann man, wenn man davon absieht, dafs statt *eines* Systems in unserem Fall deren *zwei* zu integriren sind, wenn man also nur auf die Art des Problems, nicht auf die Anzahl der Systeme sieht, sagen, dafs bei den *Pfaff*schen Gleichungen die Kenntnifs *eines* Integrals die Aufgabe so reducire, wie im allgemeinen Falle die Kenntnifs von *zweien.*

Da die Gleichungen (11.) $2n-1$ Integrale erfordern, die Gleichungen (24.) aber nur $2n-3$ geben, zu welchen noch u_1 kommt, so scheint *ein* Integral der Gleichungen (11.) zu fehlen. Dies ist jedoch α_1 selbst, denn α_1 ist von A unabhängig; dies fehlende Integral hat die Form eines Index, wird also nach Auflösung der Gleichungen (24.) durch Quadratur gefunden. —

Ist nun ein ferneres Integral der Gleichungen (24.), also ein solches, welches nicht mit u_1 oder α_1 zusammenfällt, bekannt, so kann dies für u_2 genommen werden, da nach §. 5 das erste Integral jedes Systems ganz beliebig genommen werden konnte, dann ist:

$$\Sigma AX\delta x-\alpha_1\delta u_1-\alpha_2\delta u_2 = \alpha_3\delta u_3+\alpha_4\delta u_4+\cdots+\alpha_n\delta u_n,$$

und ganz wie in §. 7 lassen sich dann die Gleichungen bilden:

$$(25.)\quad\begin{cases} X_1\,\partial A = \partial\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\partial\alpha_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+A\,\Sigma_p(p,1)\,\partial x_p,\\ X_2\,\partial A = \partial\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\partial\alpha_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+A\,\Sigma_p(p,2)\,\partial x_p,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ X_{2n}\,\partial A = \partial\alpha_1\dfrac{\partial u_1}{\partial x_{2n}}+\partial\alpha_2\dfrac{\partial u_2}{\partial x_{2n}}+A\,\Sigma_p(p,2n)\,\partial x_p.\end{cases}$$

A, α_1, α_2 sind Indices; die Gleichungen reduciren sich mit Hülfe der constanten Werthe von u_1, u_2, nach Elimination von x_1, x_2, A, α_1, α_2, auf $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen; die Anzahl der Integrale ist aber $2n-5$, mithin werden, wie dies bei der Unabhängigkeit der Gröfsen A, α_1, α_2 von einander sich auch von selbst versteht, drei Variable unabhängig, und es sind drei Systeme von $2n-5$ Gleichungen mit $2n-4$ Variablen zu integriren. Ist im Allgemeinen von einem System von $2n-3$ Gleichungen ein Integral bekannt, so hat man noch $2n-4$ Gleichungen, also vertritt auch diese Integration in dem oben erwähnten Sinne die Stelle von *zweien.* Aufser u_2

fehlt dann in den Gleichungen (25.) noch ein anderes Integral der Gleichungen (24.), und dies ist wieder der Index α_2.

Ist von den Gleichungen (25.) wiederum ein Integral u_3 bekannt, so erhält man Differentialgleichungen von der Form:

$$(26.)\qquad X_s\partial A = \partial\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + \partial\alpha_2\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + \partial\alpha_3\frac{\partial u_3}{\partial x_s} + A\Sigma_p(p,s)\partial x_p,$$

es sind dann vier Systeme von $2n-7$ Gleichungen mit $2n-6$ Variablen zu integriren, u. s. f. Die in den Gleichungen (24.), (25.), (26.) u. s. w. nicht enthaltenen Integrale der Gleichungen (11.) sind die Indices α_1, α_2, α_3. Sind alle u bekannt, so ergeben sich die Indices durch Differentiation, denn man hat $AX_p = \Sigma\alpha\frac{\partial u}{\partial x_p}$, $2n$ Gleichungen, die in Beziehung auf die α linear sind und zu deren Bestimmung hinreichen. Sind aber nicht die noch übrigen u, sondern nur die Integrale der Gleichungen (26.) bekannt, so ergeben sich α_1, α_2, α_3 nur durch Quadratur.

Ist von dem System (26.) wieder ein Integral bekannt, von dem neu entstehenden wieder eins und so fort bis zum r^{ten}, so erhält man Gleichungen von der Form:

$$(27.)\qquad X_s\partial A = \Sigma_q\partial\alpha_q\frac{\partial u_q}{\partial x_s} + A\Sigma_p(p,s)\partial x_p,$$

wo für p und s alle Zahlen von 1 bis $2n$, für q alle von 1 bis r zu setzen sind. Ist diese Gleichung (27.) integrirt, und sind V_{2r+1}, V_{2r+2}, ... V_{2n} ihre Integrale, so hat man:

$$\Sigma X\delta x - \Sigma_q\alpha_q\delta u_q = b_{2r+1}\delta V_{2r+1} + b_{2r+2}\delta V_{2r+2} + \cdots + b_{2n}\delta V_{2n}.$$

Sind die α, u und V bekannt, so sind es auch die b, und man behandelt die Gleichung $\Sigma b\,dV = 0$ ganz nach der in §. 5 angegebenen Art.

§. 11.

Vortheile für die Integration, wenn gleichzeitig zwei oder mehrere Integrale gegeben sind.

Sind zwei Integrale der Gleichungen (11.) gleichzeitig gegeben, und ist eins derselben u_2 zugleich ein Integral der Gleichungen (24.) oder, was dasselbe ist, ein Integral der Gleichung $\Sigma X dx = 0$, denn das erste Integral jedes Systems kann auch als ein Integral der letzteren Gleichung betrachtet werden, so würde mit denselben ganz wie im vorigen Paragraphen zu operiren sein, mithin durch diese zwei Integrale die Aufgabe so reducirt werden, wie im allgemeinen Falle durch vier Integrale. Im Allgemeinen ist nun u_2 eine

Function von u_1, α_1 und einem beliebigen Systeme von Integralen der Gleichungen (24.). Es kann aber u_1 vermittelst der Gleichung $u_1 = \text{Const.}$ eliminirt werden. Ist auch α_1 in u_2 nicht enthalten, so ist letzteres ein Integral von (24.). Die Bedingung für dies Nichtenthaltensein ist: $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = 0$. Setzen wir nun in den Gleichungen (24.) die Indices A und α_1 als unabhängige Variable, so verwandeln sich die Gleichungen (24.) in zwei Systeme von der Form:

$$X_s = A \Sigma_p (p, s) \left(\frac{\partial x_p}{\partial A}\right), \qquad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + A \Sigma (p, s) \left(\frac{\partial x_p}{\partial \alpha_1}\right).$$

Das erste System ist identisch mit dem System (11.), wird also jedenfalls u_2 zum Integral haben, aus dem zweiten kann man die Differentialquotienten: $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)$, $\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)$, ... $\left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_1}\right)$ berechnen und in die Gleichung

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \Sigma_r \frac{\partial u_2}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial \alpha_1}$$

einsetzen; man erhält dann:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A} \Sigma_{p,r} Q_{p,r} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_r},$$

wo die Q leicht zu bestimmende Functionen der Gröfsen (p, s) sind. Die Bedingungsgleichung dafür, dafs u_1 und u_2 wirklich die angeführte Reduction bewirken, ist

$$\Sigma_{p,r} Q_{p,r} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_r} = 0.$$

Sind gleichzeitig drei Integrale u_1, u_2, u_3 gegeben, so wird das Problem so reducirt, als wären im allgemeinen Falle sechs Integrale bekannt, wenn $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}\right) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}\right) = 0$ ist. Die Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}$, die hierin vorkommen, sind durch die Gleichungen (25.) gegeben, welche man schreiben kann:

$$0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + A \Sigma_p (p, s) \frac{\partial x_p}{\partial \alpha_1},$$

$$0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_s} + A \Sigma_p (p, s) \frac{\partial x_p}{\partial \alpha_2}.$$

Sind n Integrale gegeben, welche die Gleichungen: $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = 0$, $\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}\right) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}\right) = 0$, ... $\left(\frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1}\right) = \left(\frac{\partial u_n}{\partial \alpha_2}\right) = \cdots = \left(\frac{\partial u_n}{\partial \alpha_{n-1}}\right) = 0$ erfüllen, so sind dies die n Integrale der Gleichung $\Sigma X dx = 0$. Die dann noch feh-

lenden Integrale der Gleichungen (11.) sind die α, und diese lassen sich aus den Gleichungen: $\Sigma A X \frac{\partial x}{\partial u_s} = \alpha_s$ bestimmen.

Sind aber nur p Integrale u bekannt, so ergeben sich die $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ aus den Gleichungen (27.) durch Quadratur unter Anwendung des §. 3. —

Kommen wir nun wieder auf den Fall, wo zwei Integrale gleichzeitig gegeben sind, zurück, und nehmen wir an, es sei der Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A} \Sigma_{p,r} Q_{p,r} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_r}$$

nicht gleich Null, so ist, da u_2 und α_1 Integrale der Gleichungen (11.) sind, jedenfalls $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ ein neues Integral, denn u_2 ist irgend eine Function von den Hauptintegralen der Gleichungen (24.) und aufserdem von α_1; dieselbe Form mufs dann natürlich auch $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ haben, also ein Integral der Gleichung (11.) sein. Um dies Integral bestimmen zu können, mufs jedoch der erste Indèx A bekannt sein. Nehmen wir an, A sei in der That bekannt, so können drei Fälle eintreten. Entweder es ist $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ identisch einer Constanten gleich, also $u_2 = c\alpha_1$, dann kann dies Integral nur dazu dienen, den einen Index α_1 ohne Quadratur zu bestimmen; oder es ist $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ einer Function $\varphi(u_2)$ von u_2 gleich, also $\alpha_1 = \int \frac{du_2}{\varphi(u_2)}$, dann ist der Vortheil noch geringer, er besteht nur darin, dafs die Quadratur, welche α_1 bestimmt, sich gleich anfänglich, ohne dafs die Integration der Gleichungen (24.) vollendet ist, machen läfst; oder endlich es ist $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ weder der Null noch einer Constanten noch einer Function von u_2 identisch gleich, sondern $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = v$ ist ein neues Integral, dann läfst sich mit v wie oben mit u_2 verfahren.

Ist nämlich $\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right) = 0$, so ist v, wie vorher u_2, zur Reduction des Problems zu gebrauchen; ist $\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right)$ gleich einer von Null verschiedenen Constanten oder gleich einer Function von v allein, so ergiebt sich nur α_1 daraus; ist $\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right)$ eine Function von u_2 oder von u_2 und v, so geben die beiden Gleichungen $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = v$, $\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right) = \varphi(u_2, v)$, welche auf die Gleichung: $\frac{\partial v}{\partial u_2} = \frac{\varphi(u_2, v)}{v}$ zurückkommen, ein Integral $\psi(u_2, v)$, welches von α_1 unabhängig ist, mithin zur Reduction dient, aufserdem ergiebt sich α_1 selbst durch Quadratur; ist endlich $\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right)$ eine auf u_2 und v nicht zurückführbare Function w der x, so ist w

ein drittes Integral, und es ist nun der Ausdruck $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ zu untersuchen, für welchen wieder dieselben Fälle zu unterscheiden sind.

Ist ins Besondere $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ eine Function von u_2, v, w, so geben die Gleichungen $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = v$, $\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right) = w$, $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right) = \varphi(u_2, v, w)$ zwei von α_1 unabhängige Integrale, und aufserdem die Bestimmung von α_1 durch Quadratur. Eins der unabhängigen Integrale wäre für die Reduction brauchbar, für das andere, welches s sei, käme es auf die Untersuchung des Ausdruckes $\left(\frac{\partial s}{\partial \alpha_2}\right)$ an.

Findet man nun durch die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = v, \qquad \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}\right) = w, \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right) = w', \qquad \text{u. s. w.}$$

immer neue Functionen, und ist keine von diesen der Null oder einer Constanten, noch einer Function von u_2, v, w, w', ... identisch gleich, so gelingt es immer neue Integrale zu finden; und kann man dies $(2n-1)$mal fortsetzen, so hat man alle Integrale der Gleichungen (11.) mittelst der zwei gegebenen u_1, u_2.

Für drei gegebene Integrale lassen sich leicht ähnliche Schlüsse machen.

§. 12.

Zusammenfassung der gefundenen Resultate.

Wenn wir das in §§. 4 bis 11 Gesagte nochmals zusammenfassen, so haben wir folgende Ergebnisse:

I. Die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ hat, je nachdem die Anzahl der Variablen $2n$ oder $2n+1$ ist, n oder $n+1$ Integrale. Im letzteren Falle ist darunter ein willkürliches (§. 4); wenn mit Hülfe desselben eine Variable eliminirt wird, ist die Aufgabe auf den ersten Fall zurückgeführt.

II. Die Bestimmung dieser Integrale führt zu n Systemen von Differentialgleichungen mit bezüglich $2n$, $2n-2$, ... 6, 4, 2 Variablen, (§. 5, (11.)) von denen bei $2n+1$ gegebenen Variablen das erste die Form in (20.) §. 7, annimmt. Fallen jedoch in der Gleichung $\Sigma X dx = 0$ von den Functionen X $n-p$ aus, so hat man nur p Systeme von Differentialgleichungen zu integriren (§. 6, Schlufs); fallen ins Besondere $n-1$ von den Functionen X aus, so dafs die vorgelegte Gleichung sich auf $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{n+1} dx_{n+1} = 0$ zusammenzieht, wo die X Functionen von x_1, x_2, x_3, ... x_{2n} sind, so ist nur *ein* System zu integriren.



III. Soll die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ weniger Integrale haben als bezüglich n oder $n+1$, so müssen bei $2n$ Variablen $q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen, bei $2n+1$ Variablen $(q+1)(2q+1)$ Bedingungsgleichungen erfüllt werden, damit die Anzahl der Integrale $n-q$ sei (§. 8), dabei tritt eine Reduction der zu integrirenden Gleichungssysteme ein, derart, dafs man statt q Systeme mit bezüglich $2n$, $2n-2$, ... $2n-2q+2$ Variablen $2q$ Systeme jedes mit $2n-2q+1$ Variablen zu integriren hatte (§. 9).

IV. Besondere Vortheile ergeben sich bei Auflösung der Gleichungen (11.), wenn man *ein* Integral derselben kennt. Dadurch wird die Aufgabe auf zwei Systeme von $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen reducirt. Ist auch von diesen ein Integral bekannt, so sind alsdann drei Systeme von $2n-5$ Gleichungen mit $2n-4$ Variablen zu integriren. Ist auch von diesen ein Integral bekannt, von den neu entstehenden wieder eins und so fort, und sind so im Ganzen p Integrale bekannt, so hat man dann noch $p+1$ Systeme von $2n-2p-1$ Gleichungen mit $2n-2p$ Variablen zu integriren, und die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ ist auf diese Weise so reducirt, als hätte man die p ersten Systeme der Gleichungen (11.) bereits integrirt (§. 10). Man kann dies auch so ausdrücken: Jede Integration vereinfacht die Aufgabe, abgesehen von der Anzahl der zu integrirenden Systeme, so, als wären zwei Integrale im allgemeinen Falle der Auflösung von Differentialgleichungen gefunden. An der Stelle der ersparten Integrationen sind Quadraturen auszuführen.

V. Sind zwei, drei oder mehr Integrale gleichzeitig gegeben, so sind gewisse leicht aufzustellende Bedingungsgleichungen zu erfüllen, damit diese 2, 3 ... Integrale die Aufgabe so reduciren, wie im Allgemeinen 4, 6 ... Integrale (§. 11). Werden diese Bedingungsgleichungen nicht erfüllt, so lassen sich andere Vortheile ziehen. Unter Umständen sind zwei Integrale und ein Index hinreichend, um das Problem vollständig zu lösen. —

Diese Uebersicht wird zum bessern Verständnifs des folgenden Paragraphen dienlich sein.

§. 13.

Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es sei jetzt

$$a = \varphi\left(z, x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$$

eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung, so kann man dafür

das System setzen:

$$a = \varphi(z, x_1, x_2, \dots x_n, p_1, p_2, \dots p_n)$$

und

$$p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \quad \dots \quad p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

Diese letzteren Gleichungen sind identisch mit der neuen:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

wo zwischen z und den x und p die Bedingungsgleichung $\varphi = a$ stattfindet. Diese Gleichung stimmt mit der Gleichung $\Sigma X dx = 0$ überein, wenn man statt der x setzt: $z, x_1, x_2, \dots x_n;\ p_1, p_2, \dots p_n$, statt der X aber: $1, -p_1, -p_2, \dots -p_n, 0, 0, \dots 0$; die Anzahl der Variablen ist nämlich $2n+1$, von den X sind dann $n-1$ gleich Null. Eine Variable kann man mittelst der Gleichung $\varphi = a$ eliminiren, oder auch diese Gleichung als das willkürliche Integral betrachten, welches im Fall von $2n+1$ Variablen immer auftritt. Den letzteren Weg wollen wir einschlagen, die Gleichungen (19.) oder (20.) geben dann:

$$(28.)\quad p_s \partial A + \partial\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial x_s} = -A\partial p_s, \quad \partial\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial p_s} = A\partial x_s, \quad -\partial A + \partial\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Mittelst der letzten Gleichung kann man ∂A eliminiren, und hat:

$$(28^a.)\quad \partial\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -A\partial p_s, \quad \partial\lambda \frac{\partial\varphi}{\partial p_s} = A\partial x_s,$$

wozu noch die Gleichung

$$\partial z = \Sigma p \partial x$$

kommt. Da nun in diesem Fall $n-1$ der Functionen X gleich Null sind, so ist hier nur ein System von Differentialgleichungen (28.) oder (28ᵃ.) zu integriren (§. 12, II.). Sind, für $z=0$, $x'_1, x'_2, \dots x'_n, p'_1, p'_2, \dots p'_n$ die Hauptintegrale desselben und A' der Werth von A, so ist

$$\delta z - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n = -\frac{A'}{A}(p'_1 \delta x'_1 + p'_2 \delta x'_2 + \dots + p'_n \delta x'_n).$$

Die Integrale der Gleichungen (28.) sind aufser $x'_1, \dots x'_n$ noch $p'_1, p'_2, \dots p'_{n-1}$.

Was über die Vortheile, welche die Kenntnifs *eines* Integrals gewährt, gesagt worden ist, gilt hier unverändert. Sind gleichzeitig zwei Integrale gegeben, so nimmt indessen der Ausdruck $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ eine besonders einfache Gestalt an. Wie in §. 10 beweist man nämlich die Gleichungen:

$$\partial\alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) = -A\partial p_s, \quad \partial\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial p_s} = A\partial x_s$$

(man erhält dieselben, wenn man die Gleichungen entwickelt, welche sich aus der Kenntnifs des Integrals u_1 ergeben §. 10, (24.), und λ und α_1 als unab-



hängige Variable betrachtet). Da nun:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\right) + \Sigma_s \frac{\partial u_2}{\partial x_s}\left(\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}\right) + \Sigma_s \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1}\right)$$

ist, und da sich

$$\left(\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial u_1}{\partial p_s}, \quad \left(\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1}\right) = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial u_1}{\partial z}\right),$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\right) = \Sigma_s p_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A}\Sigma_s p_s \frac{\partial u_1}{\partial p_s}$$

ergiebt, so kommt:

$$(29.)\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A}\Sigma_s\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right),$$

und das Criterium dafür, dafs u_1, u_2 die Aufgabe so reduciren wie vier Integrale, wird:

$$0 = \Sigma_s\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right).$$

Betrachten wir ins Besondere eine partielle Differentialgleichung, in welcher z selbst nicht vorkommt, sondern nur dessen Differentiale, so dafs φ von z unabhängig ist, alsdann wird wegen der letzten Gleichung (28.) A constant; denkt man sich daher in den Gleichungen (28^a.) λ durch $A\lambda$ ersetzt, so nehmen dieselben die Form an:

$$(30.)\quad \left(\frac{\partial p_s}{\partial \lambda}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}, \quad \left(\frac{\partial x_s}{\partial \lambda}\right) = \frac{\partial \varphi}{\partial p_s}.$$

Mittelst $\varphi = a$ läfst sich eine Variable eliminiren; z ist in den Gleichungen (30.) nicht vorhanden, also reducirt sich das System (28^a.) um eine Ordnung. Schliefslich ist dann z gegeben durch die Gleichung

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right) = \Sigma p_s \left(\frac{\partial x_s}{\partial \lambda}\right) = \Sigma p_s \frac{\partial \varphi}{\partial p_s},$$

so dafs, wenn nach der Integration des Systems (30.) die x und p als Functionen von λ bestimmt sind, $z = \int p_s \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} d\lambda$ wird, die Variable z mithin als Index des Systems vorkommt. Sind u_1 und u_2 wieder zwei gleichzeitig gegebene Integrale, so wird:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \Sigma_s\left(\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\frac{\partial u_2}{\partial x_s} - \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\frac{\partial u_1}{\partial x_s}\right).$$

(Es ist dies der von *Poisson* bei einer anderen Gelegenheit benutzte, von *Jacobi* für die Integration der mechanischen Gleichungen angewandte Ausdruck.) Dieser Ausdruck enthält den Index A nicht, es ist dies also der einzige Fall,

wo alle die Schlüsse, welche sich für die Integration der Gleichungen ergaben, wenn $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ nicht gleich Null ist, sich immer machen lassen, ohne dafs man noch einen Index A zu kennen braucht. In dem vorliegenden Falle ist $A = A'$, da A constant ist; sind $x'_1, x'_2, \dots x'_n, p'_1, p'_2, \dots p'_n$ die Hauptintegrale für $z = 0$, so wird also identisch:

$$\delta z - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - \cdots - p_n \delta x_n = -p'_1 \delta x'_1 - p'_2 \delta x'_2 - \cdots - p'_n \delta x'_n.$$

Die Auflösung der Gleichungen (30.) oder die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung, welche die unabhängige Variable z nicht selbst enthält, löst also auch die Aufgabe, den Ausdruck $\delta z - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - \cdots - p_n \delta x_n$, wo die p und x durch Gleichung $\varphi = a$ verbunden sind, in einen anderen von derselben Form zu verwandeln, $-p'_1 \delta x'_1 - p'_2 \delta x'_2 - \cdots - p'_n \delta x'_n$, der ein Glied weniger hat, und wo die Functionen p', x' von den p, x und von z abhängig sind. Auf diese Transformation aber sind die Aufgaben der Variationsrechnung zurückzuführen.

Berlin, im Januar 1860.

Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante.

(Par M. *L. Lorenz* à Copenhague.)

Nous désignons par N_1, N_2, N_3 et T_1, T_2, T_3 les composantes normales et tangentielles, rapportées à l'unité de surface, de la force élastique exercée sur les trois plans perpendiculaires aux coordonnées rectangulaires x, y et z; par u, v, w les projections sur les axes coordonnés du déplacement d'un point matériel (x, y, z); par ϱ la densité du milieu; par X, Y, Z les composantes des forces accélératrices qui pourraient agir sur l'élément de la masse.

Les équations qui servent comme point de départ dans les problèmes que je me propose de résoudre, donnent pour les forces élastiques les valeurs

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx}, \qquad T_1 = \mu\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$

$$N_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy}, \qquad T_2 = \mu\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right),$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz}, \qquad T_3 = \mu\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$

dans lesquelles λ et μ sont des constantes, et θ c. à. d. la dilatation est exprimée par:

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

De ces six équations on déduit, en mettant

$$\triangle^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2},$$

dans le cas de l'équilibre d'élasticité:

$$(1.)\qquad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\triangle^2 u + \varrho X = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\triangle^2 v + \varrho Y = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\triangle^2 w + \varrho Z = 0, \end{cases}$$

et dans le cas du mouvement:

$$(2.)\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx}+\mu\Delta^2 u+\varrho X=\varrho\dfrac{d^2u}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy}+\mu\Delta^2 v+\varrho Y=\varrho\dfrac{d^2v}{dt^2}, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz}+\mu\Delta^2 w+\varrho Z=\varrho\dfrac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

1.

Elimination des forces accélératrices.

Les fonctions u, v, w se composent de deux espèces de termes, dont les uns, que nous désignerons par u_0, v_0, w_0 font disparaître les composantes des forces accélératrices X, Y, Z; les autres forment les intégrales générales des équations (1.) et (2.), ces forces étant nulles. Nous ferons donc voir que l'on pourra toujours déterminer les fonctions u_0, v_0, w_0, les X, Y, Z étant des fonctions connues quelconques, et pour généraliser le problème nous supposons que ces forces sont aussi des fonctions du temps t, ce que nous désignerons en ajoutant un t sous le signe de ces fonctions.

En effectuant les différentiations, on vérifie aisément l'équation

$$(3.)\qquad a^2\Delta^2\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}=\frac{d^2}{dt^2}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},$$

où a est une constante, $\varphi(t)$ une fonction quelconque de t, α, β, γ, et r égal à $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$.

Cela posé considérons l'intégrale

$$\int d\varpi\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r},$$

$d\varpi$ désignant l'élément de volume $d\alpha\, d\beta\, d\gamma$ et l'intégration se rapportant à un espace quelconque. En appliquant à cette intégrale les deux opérations $\frac{d^2}{dt^2}$ et Δ^2 on trouve

$$(3^a.)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\int d\varpi\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}=\int d\varpi\frac{d^2}{dt^2}\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}.$$

Mais l'équation

$$(3^b.)\qquad \Delta^2\int d\varpi\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}=\int d\varpi\,\Delta^2\frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}$$

n'est exacte que dans le cas où le point (x, y, z) se trouve en dehors des limites de l'intégration relative à α, β, γ. Dans le cas contraire il existe des éléments infinis sous l'intégrale, r pouvant s'évanouir, et la différentiation sous l'intégrale cesse d'être permise. On trouve aisément la modification que l'équation (3^b.) subit alors en considérant l'intégrale

$$\int d\varpi \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\varphi(t)}{r}.$$

L'expression sous cette intégrale ne devient plus infinie lorsque r s'évanouit. On a donc

$$\triangle^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\varphi(t)}{r} = \int d\varpi \triangle^2 \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)-\varphi(t)}{r}$$

pour l'un et l'autre des deux cas distingués ci-dessus; et comme $\triangle^2 \frac{1}{r}$ qui dans la seconde partie de cette équation se trouve sous l'intégrale est identiquement nul, on a

$$(3^c.) \qquad \triangle^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r} = \int d\varpi \triangle^2 \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r} + \triangle^2 \int d\varpi \frac{\varphi(t)}{r}$$

équation exacte pour des valeurs quelconques de x, y, z.

Si maintenant on multiplie (3^c.) par la constante a^2, qu'on en déduise (3^a.) et qu'on se serve de l'équation (3.) et du résultat connu:

$$\triangle^2 \int d\varpi \frac{\varphi(t, \alpha, \beta, \gamma)}{r} = -4\pi\varphi(t, x, y, z) \text{ ou } = 0$$

suivant que (x, y, z) se trouve ou ne se trouve pas entre les limites de l'intégration, on parvient à l'équation

$$(4.) \qquad a^2 \triangle^2 \int d\varpi \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}, \alpha, \beta, \gamma\right)}{r}$$

$$= \frac{d^2}{dt^2} \int d\varpi \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{a}, \alpha, \beta, \gamma\right)}{r} - 4\pi a^2 \varphi(t, x, y, z),$$

le point (x, y, z) étant situé entre les limites de l'intégration.

Désignons par $X_2(t)$, $Y_2(t)$, $Z_2(t)$ les fonctions qui satisfont aux équations

$$\triangle^2 X_2(t) = X(t), \quad \triangle^2 Y_2(t) = Y(t), \quad \triangle^2 Z_2(t) = Z(t),$$

par $A_2(t)$, $B_2(t)$, $C_2(t)$ des fonctions correspondantes à celles-ci, x, y, z

étant remplacés par α, β, γ, et posons, pour abréger,

$$F = \frac{1}{4\pi\Omega^2}\int\frac{d\varpi}{r}\left[\frac{dA_2\left(t-\frac{r}{\Omega}\right)}{d\alpha}+\frac{dB_2\left(t-\frac{r}{\Omega}\right)}{d\beta}+\frac{dC_2\left(t-\frac{r}{\Omega}\right)}{d\gamma}\right],$$

$$L = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int\frac{d\varpi}{r}\left[\frac{dB_2\left(t-\frac{r}{\omega}\right)}{d\gamma}-\frac{dC_2\left(t-\frac{r}{\omega}\right)}{d\beta}\right],$$

$$M = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int\frac{d\varpi}{r}\left[\frac{dC_2\left(t-\frac{r}{\omega}\right)}{d\alpha}-\frac{dA_2\left(t-\frac{r}{\omega}\right)}{d\gamma}\right],$$

$$N = \frac{1}{4\pi\omega^2}\int\frac{d\varpi}{r}\left[\frac{dA_2\left(t-\frac{r}{\omega}\right)}{d\beta}-\frac{dB_2\left(t-\frac{r}{\omega}\right)}{d\alpha}\right],$$

où

$$\Omega^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}, \quad \omega^2 = \frac{\mu}{\varrho}.$$

Les limites des intégrales sont les limites du corps élastique, et les dérivées partielles par rapport à α, β, γ sont prises, en conservant r constant.

On trouvera donc que les valeurs

$$(5.)\quad \begin{cases} u_0 = \frac{dF}{dx}+\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}, \\ v_0 = \frac{dF}{dy}+\frac{dL}{dz}-\frac{dN}{dx}, \\ w_0 = \frac{dF}{dz}+\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dy} \end{cases}$$

satisfont aux équations (2.). La première équation (2.), par exemple, en y substituant ces valeurs de u_0, v_0, w_0, deviendra

$$\Omega^2\Delta^2\frac{dF}{dx}+\omega^2\Delta^2\left[\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}\right]+X = \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{dF}{dx}+\frac{dN}{dy}-\frac{dM}{dz}\right].$$

Mais, d'après l'équation (4.), on a

$$\Omega^2\Delta^2 F = \frac{d^2F}{dt^2}-\left(\frac{dX_2(t)}{dx}+\frac{dY_2(t)}{dy}+\frac{dZ_2(t)}{dz}\right),$$

$$\omega^2\Delta^2 N = \frac{d^2N}{dt^2}-\frac{dX_2(t)}{dy}+\frac{dY_2(t)}{dx},$$

$$\omega^2\Delta^2 M = \frac{d^2M}{dt^2}-\frac{dZ_2(t)}{dx}+\frac{dX_2(t)}{dz},$$

et notre équation se réduit donc à l'équation identique

$$-\Delta^2 X_2(t)+X = 0.$$

Ainsi la première des équations (2.) est vérifiée et les deux autres peuvent l'être de la même manière.

Le problème de l'élimination des forces accélératrices étant donc complètement résolu, nous ferons dorénavant abstraction de ces forces.

2.

Des mouvements d'un corps élastique illimité qui sont produits par les mouvements dans un plan.

Avant d'entrer dans la question dont il s'agit nous ferons quelques remarques mathématiques d'une grande importance dans la théorie de l'élasticité.

Une fonction finie de plusieurs variables $f(x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1})$ peut être exprimée par une intégrale définie de la manière suivante:

$$(6.)\quad f(x_1, x_2, \dots x_{n-1})$$
$$= \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\pi^{\frac{1}{2}n}} \Big[\int d\alpha_1 \int d\alpha_2 \dots \int d\alpha_{n-1} f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}) \frac{x_n - \alpha_n}{r^n} \Big]^{x_n = \alpha_n}$$

où

$$r = \sqrt{(x_1-\alpha_1)^2 + (x_2-\alpha_2)^2 + \dots + (x_n - \alpha_n)^2}.$$

Dans cette formule les limites de l'intégration sont arbitraires et assujetties à la seule condition que les valeurs $\alpha_1 = x_1$, $\alpha_2 = x_2$, ... $\alpha_{n-1} = x_{n-1}$ y soient comprises. Cette condition sera donc toujours remplie, si chacune des $n-1$ intégrations est faite entre les limites $-\infty$ et $+\infty$. De plus la différence $x_n - \alpha_n$ est supposée être positive avant d'être nulle.

On vérifie cette équation en considérant que, x_n étant égal à α_n, tous les éléments de l'intégrale s'évanouissent, excepté ceux pour lesquels r est égal à zéro, d'où $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, ... $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$,

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{n-1}) = f(x_1, x_2, \dots x_{n-1}),$$

et en se servant du résultat connu d'après lequel l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha_{n-1} \frac{x_n - \alpha_n}{r^n}$$

qui se transforme en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_{n-1} \frac{1}{\{1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2\}^{\frac{1}{2}n}}$$

par les substitutions $\alpha_1 - x_1 = \xi_1(x_n - \alpha_n)$, ... $\alpha_{n-1} - x_{n-1} = \xi_{n-1}(x_n - \alpha_n)$ est égale à $\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)}$ (*Jacobi* de transform. integr. mult., vol. 12, pag. 60 de ce Journal, où l'intégrale dont il s'agit est désignée par $2^{n-1}S$).

Il est bon d'observer que l'expression comprise entre les crochets (6.) satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2}{dx_1^2}+\frac{d^2}{dx_2^2}+\cdots+\frac{d^2}{dx_n^2}=0.$$

Une fonction de deux variables $f(x,y)$ sera donc exprimée par

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\Big[\int d\alpha\int d\beta\,\frac{z-\gamma}{r^3}f(\alpha,\beta)\Big]^{z=\gamma},\quad r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$$

ou

$$(7.)\qquad f(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{d}{dz}\int d\alpha\int d\beta\,\frac{f(\alpha,\beta)}{r}\Big]^{z=\gamma}$$

le point (x,y) étant situé entre les limites de l'intégration relative à α, β, et $z-\gamma$ étant supposé positif avant d'être nul.

L'expression comprise entre les crochets satisfait à l'équation différentielle $\triangle^2=0$, et elle exprime l'attraction que d'après la loi *Newton*ienne un plan exerce sur un point dans la direction de la normale du plan, la masse d'un élément étant $f(\alpha,\beta)\,d\alpha\,d\beta$, et l'attraction exercée par l'unité de masse dans l'unité de distance étant égale à l'unité. La formule (7.) équivaut donc à l'énoncé, que l'attraction que le plan exerce sur un point infiniment rapproché, dans la direction de la normale, est égale à $2\pi f(x,y)$, c'est-à-dire, à la masse de l'élément-plan $dx\,dy$ divisée par $\frac{1}{2\pi}dx\,dy$. Supposons qu'il s'agisse de satisfaire à l'équation différentielle

$$a^2\triangle^2 F=\frac{d^2F}{dt^2},$$

a étant une constante et que la fonction F soit en outre déterminée par la condition que pour un plan arbitrairement limité dans lequel nous plaçons le plan coordonné (y,z) et pour des valeurs quelconques du temps t elle se réduise à une fonction donnée de y, z et t, de sorte que l'on ait:

$$[F]^{x=0}=F(t,y,z),$$

cela posé le mouvement sera déterminé dans tout l'espace du côté positif du plan coordonné (y,z) par l'équation

$$(8.)\qquad\begin{cases}F=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int d\alpha\int d\beta\,\dfrac{F\left(t-\frac{r}{a},\beta,\gamma\right)}{r},\\ r=\sqrt{x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2},\end{cases}$$

les limites de l'intégrale étant celles du plan donné. Cette expression satis-

fera à l'équation différentielle et, pour $x=0$, on aura

$$[F]^{x=0} = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{dx}\int d\alpha \int d\beta \frac{F\left(t-\frac{r}{a}, \beta, \gamma\right)}{r}\right]^{x=0}$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{d}{dx}\int d\alpha \int d\beta \frac{F(t, \beta, \gamma)}{r}\right]^{x=0},$$

d'où, après la formule (7.),

$$[F]^{x=0} = F(t, y, z),$$

ce qui est la condition donnée.

Nous sommes donc en état de résoudre, par la méthode indiquée, un problème, que l'on n'a résolu jusqu'ici que d'une manière inexacte et incomplète moyennant le principe de ***Huyghens***.

L'intégrale F nous fait voir que le mouvement peut être considéré comme partant de chaque élément-plan $d\beta\, d\gamma$ avec une vitesse constante, égale à a.

Passons maintenant aux trois équations (2.) du mouvement, en faisant abstraction des forces accélératrices. En les ajoutant, après les avoir respectivement différentiées par rapport à x, y et z, on obtient, comme on sait,

$$\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\triangle^2\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2};$$

par conséquent $\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}} = \Omega$ est la vitesse avec laquelle chaque condensation ou dilatation se propage dans le corps élastique.

Par l'élimination de θ on déduit des équations (2.) le résultat

$$\frac{\mu}{\varrho}\triangle^2\varphi = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \qquad \varphi = \begin{cases} \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy} \\ \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz} \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} \end{cases}.$$

Il y a donc une autre espèce de mouvement, qui se propage avec la vitesse $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} = \omega$.

Pour la première espèce de mouvement, il faut avoir $\varphi = 0$, et par là

$$(9.) \qquad u = \frac{dF}{dx}, \quad v = \frac{dF}{dy}, \quad w = \frac{dF}{dz}, \quad \Omega^2\triangle^2 F = \frac{d^2F}{dt^2}.$$

L'autre fera

$$(10.)\quad \begin{cases} \theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0, \\ \text{d'où} \\ \omega^2\triangle^2 u = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad \omega^2\triangle^2 v = \frac{d^2v}{dt^2}, \quad \omega^2\triangle^2 w = \frac{d^2w}{dt^2}. \end{cases}$$

Désignons maintenant par u, v, w les projections des déplacements, qui dépendent de ω; par u', v', w' celles qui dépendent de Ω; par U, V, W la somme de ces deux, et introduisons les nouvelles fonctions:

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}, \quad \Phi' = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\varphi\left(t-\frac{r}{\Omega},\beta,\gamma\right)}{r},$$

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\psi\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}, \quad \Psi' = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\psi\left(t-\frac{r}{\Omega},\beta,\gamma\right)}{r},$$

$$X = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\chi\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}, \quad X' = -\frac{1}{2\pi}\int d\beta \int d\gamma \frac{\chi\left(t-\frac{r}{\Omega},\beta,\gamma\right)}{r},$$

$$r = \sqrt{x^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}.$$

Nous verrons, que l'on pourra déterminer les mouvements d'un corps élastique illimité, si l'on connait, dans le plan coordonné (y, z), *ou la pression normale et les déplacements tangentiels, ou les pressions tangentielles et le déplacement normal.* Dans le *premier* cas nous posons

$$(11.)\quad \begin{cases} u = \Phi - \frac{dF}{dx}, & u' = \frac{dF'}{dx}, \\ v = \frac{d\Psi}{dx} - \frac{dF}{dy}, & v' = \frac{dF'}{dy}, \\ w = \frac{dX}{dx} - \frac{dF}{dz}, & w' = \frac{dF'}{dz}, \end{cases}$$

d'où

$$\triangle^2 F = \frac{d}{dx}\left[\Phi + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{dX}{dz}\right] = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2F}{dt^2},$$

$$\triangle^2 F' = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\frac{d}{dx}\left[\Phi' + \frac{d\Psi'}{dy} + \frac{dX'}{dz}\right] = \frac{1}{\Omega^2}\frac{d^2F'}{dt^2}.$$

Ces valeurs satisfont aux équations générales du mouvement (9.) et (10.), et, pour x égal à zéro, on obtient

$$\left[\frac{du}{dx} + \frac{du'}{dx}\right]^{x=0} = \left[\frac{dU}{dx}\right]^{x=0} = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\varphi(t,y,z) - \frac{\Omega^2-\omega^2}{\Omega^2}\left[\frac{d\psi(t,y,z)}{dy} + \frac{d\chi(t,y,z)}{dz}\right],$$

$$[v+v']^{x=0} = [V]^{x=0} = \psi(t,y,z),$$

$$[w+w']^{x=0} = [W]^{x=0} = \chi(t,y,z).$$

Les fonctions φ, ψ et χ seront donc déterminées par les fonctions $\left[\frac{dU}{dx}\right]^{x=0}$ $[V]^{x=0}$ et $[W]^{x=0}$. Si l'on connaît, au lieu de $\left[\frac{dU}{dx}\right]^{x=0}$, la pression normale $[N_1]^{x=0}$, on aura

$$[N_1]^{x=0} = \left[\lambda\theta + 2\mu\frac{dU}{dx}\right]^{x=0} = \mu\left[\varphi(t,y,z) - \frac{d\psi(t,y,z)}{dy} - \frac{d\chi(t,y,z)}{dz}\right],$$

équation par laquelle la fonction φ est déterminée.

Cependant, nous n'avons pas fait attention à la fonction arbitraire qui doit entrer dans les valeurs des composantes. Ces valeurs arbitraires de u, v, w, qu'il faut ajouter aux valeurs trouvées, seront

$$u = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dy}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{1}{r}\frac{df\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{d\gamma} - \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{1}{r}\frac{df\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{d\beta},$$

$$v = \frac{1}{2\pi}\frac{d^2}{dx\,dz}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r} - \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{1}{r}\frac{df\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{d\gamma},$$

$$w = -\frac{1}{2\pi}\frac{d^2}{dx\,dy}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r} + \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int d\beta\int d\gamma\,\frac{1}{r}\frac{df\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{d\beta},$$

où les dérivées partielles par rapport à β et γ sont prises en conservant r constant. On voit que ces valeurs feront

$$\theta = 0, \quad \left[\frac{du}{dx}\right]^{x=0} = 0, \quad [v]^{x=0} = 0, \quad [w]^{x=0} = 0.$$

En intégrant par partie et désignant les limites de β et γ par β_0, β_1 et γ_0, γ_1, on pourra mettre les expressions sous cette autre forme

$$(12.)\quad\begin{cases} u = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dy}\displaystyle\int d\beta\left[\dfrac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}\right]_{\gamma=\gamma_0}^{\gamma=\gamma_1} \\ \qquad -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dz}\displaystyle\int d\gamma\left[\dfrac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}\right]_{\beta=\beta_0}^{\beta=\beta_1}, \\ v = -\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int d\beta\left[\dfrac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}\right]_{\gamma=\gamma_0}^{\gamma=\gamma_1}, \\ w = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int d\gamma\left[\dfrac{f\left(t-\frac{r}{\omega},\beta,\gamma\right)}{r}\right]_{\beta=\beta_0}^{\beta=\beta_1}. \end{cases}$$

Dans le ***deuxième*** cas, si l'on connaît dans le plan coordonné (y, z) les pressions tangentielles et le déplacement normal; il faut poser

$$(13.)\quad\begin{cases} u = \dfrac{d\Phi}{dx}-\dfrac{dF}{dx}, & u' = \dfrac{dF'}{dx}, \\ v = \Psi-\dfrac{dF}{dy}, & v' = \dfrac{dF'}{dy}, \\ w = X-\dfrac{dF}{dz}, & w' = \dfrac{dF'}{dz}, \end{cases}$$

d'où

$$\triangle^2 F = \frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d\Psi}{dy}+\frac{dX}{dz} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2F}{dt^2},$$

$$\triangle^2 F' = \frac{\omega^2}{\Omega^2}\left[\frac{d^2\Phi'}{dx^2}+\frac{d\Psi'}{dy}+\frac{dX'}{dz}\right] = \frac{1}{\Omega^2}\frac{d^2F'}{dt^2}.$$

Les fonctions φ, ψ et χ seront donc déterminées par

$$\varphi(t,y,z) = \frac{\Omega^2}{\omega^2}[U]^{x=0},$$

$$\psi(t,y,z) = \left[\frac{dV}{dx}\right]^{x=0}+\frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega^2}\frac{d}{dy}[U]^{x=0},$$

$$\chi(t,y,z) = \left[\frac{dW}{dx}\right]^{x=0}+\frac{\Omega^2-\omega^2}{\omega^2}\frac{d}{dz}[U]^{x=0}.$$

Or, les pressions tangentielles

$$[T_3]^{x=0} = \mu\left[\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dx}\right]^{x=0},\quad [T_2]^{x=0} = \mu\left[\frac{dU}{dz}+\frac{dW}{dx}\right]^{x=0}$$

étant connues, on trouvera

$$\varphi(t, y, z) = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}[U]^{x=0},$$

$$\psi(t, y, z) = \frac{1}{\mu}[T_3]^{x=0} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{d}{dy}[U]^{x=0},$$

$$\chi(t, y, z) = \frac{1}{\mu}[T_2]^{x=0} + \frac{\lambda}{\mu}\frac{d}{dz}[U]^{x=0}.$$

Les valeurs arbitraires des composantes qu'il faut ajouter à ces valeurs, seront les dérivées par rapport à x des valeurs arbitraires trouvées ci-dessus (12.).

3.

Diffraction.

Le mouvement vibratoire d'un corps élastique et illimité, ayant traversé une ouverture d'un plan fixe, serait déterminé par les méthodes indiquées, si l'on pouvait considérer comme connu le mouvement qui s'opère dans l'ouverture. Mais cela n'est vrai que d'une manière approximative, car le mouvement dans l'ouverture n'est pas exactement le même, que celui qui aurait lieu, s'il n'y avait pas de plan fixe. On aura un mouvement réfléchi de l'ouverture en même temps qu'un mouvement transmis, et, pour déterminer tous les deux, on aura les conditions suivantes: 1° la somme des composantes du mouvement direct et réfléchi est égale aux composantes du mouvement transmis à travers l'ouverture, et 2° les pressions normales et tangentielles sur les deux faces du plan qui coïncide avec l'ouverture sont égales dans chaque point.

Désignons par U, V, W les composantes du mouvement direct, par U_1, V_1, W_1 celles du mouvement transmis, par U_2, V_2, W_2 celles du mouvement réfléchi, et par θ, θ_1, θ_2 les dilatations correspondantes à ces trois mouvements. Faisons coïncider le plan coordonné (y, z) avec l'ouverture. Cela posé nous aurons pour $x=0$

$$\text{(14.)}\quad [U+U_2-U_1]^{x=0}=0,\ [V+V_2-V_1]^{x=0}=0,\ [W+W_2-W_1]^{x=0}=0$$

et de plus

$$\left[\lambda(\theta+\theta_2-\theta_1)+2\mu\frac{d(U+U_2-U_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{d(U+U_2-U_1)}{dy}+\frac{d(V+V_2-V_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0,$$

$$\left[\frac{d(U+U_2-U_1)}{dz}+\frac{d(W+W_2-W_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0.$$

Les trois dernières équations peuvent être simplifiées, au moyen des trois

premières, dérivées par rapport à y ou z; de cette manière elles se réduisent aux équations suivantes:

$$(15.)\quad \begin{cases} \left[\frac{d(U+U_2-U_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0, \\ \left[\frac{d(V+V_2-V_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0, \\ \left[\frac{d(W+W_2-W_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0. \end{cases}$$

Introduisons les notations du numéro précédent et posons

$$U_1 = u_1 + u'_1,\quad V_1 = v_1 + v'_1,\quad W_1 = w_1 + w'_1,$$
$$U_2 = u_2 + u'_2,\quad V_2 = v_2 + v'_2,\quad W_2 = w_2 + w'_2,$$
$$u'_1 = \frac{dF'_1}{dx},\quad v'_1 = \frac{dF'_1}{dy},\quad w'_1 = \frac{dF'_1}{dz},$$
$$u'_2 = \frac{dF'_2}{dx},\quad v'_2 = \frac{dF'_2}{dy},\quad w'_2 = \frac{dF'_2}{dz}.$$

Le mouvement direct peut être supposé dépendant ou de la vitesse Ω, ou de la vitesse ω. Dans *le premier cas* nous posons

$$U = \frac{dF'}{dx},\quad V = \frac{dF'}{dy},\quad W = \frac{dF'}{dz}.$$

On trouvera, que les composantes u_1, u_2, etc., qui dépendent de ω, s'évanouissent, et les équations (14.) et (15.) deviendront

$$[F' + F'_2 - F'_1]^{x=0} = 0,\quad \left[\frac{d(F'+F'_2-F'_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0.$$

Notons les équations

$$\left[\frac{d\Psi'}{dx}\right]^{x=0} = -\psi(t, y, z),\quad \left[\frac{d\Phi'}{dx}\right]^{x=0} = -\varphi(t, y, z),$$

dans lesquelles x est supposé s'évanouir, après avoir eu une valeur *négative*, et posons

$$(16.)\quad F'_2 = \Phi' + \frac{d\Psi'}{dx},\quad F'_1 = \Phi' + \frac{d\Psi'}{dx}.$$

Ces valeurs étant identiques pour les deux fonctions F'_2 et F'_1 on a

$$[F'_1 - F'_2]^{x=0} = [F']^{x=0} = 2\psi(t, y, z),$$
$$\left[\frac{d(F'_1-F'_2)}{dx}\right]^{x=0} = \left[\frac{dF'}{dx}\right]^{x=0} = 2\varphi(t, y, z).$$

Les équations précédentes déterminent les fonctions ψ et φ, et par conséquent les fonctions Φ' et Ψ'.

Dans *l'autre cas,* le mouvement direct étant dépendant de la vitesse ω, nous avons

$$U = u, \quad V = v, \quad W = w, \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les fonctions F_1' et F_2' s'évanouissent, et les équations (14.) et (15.) deviennent

$$[u + u_2 - u_1]^{x=0} = 0, \quad [v + v_2 - v_1]^{x=0} = 0, \quad [w + w_2 - w_1]^{x=0} = 0,$$
$$\left[\frac{d(u+u_2-u_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{d(v+v_2-v_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{d(w+w_2-w_1)}{dx}\right]^{x=0} = 0.$$

Introduisons les fonctions Φ_1, Ψ_1, X_1, en les faisant dépendre des nouvelles fonctions φ_1, ψ_1, χ_1, de la manière que, dans le numéro précédent, on a fait dépendre Φ, Ψ, X de φ, ψ, χ, et posons

$$(17.) \quad \begin{cases} u_1 = \Phi + \dfrac{d\Phi_1}{dx} - \dfrac{d(F+F_1)}{dx}, \\ v_1 = \Psi + \dfrac{d\Psi_1}{dx} - \dfrac{d(F+F_1)}{dy}, \\ w_1 = X + \dfrac{dX_1}{dx} - \dfrac{d(F+F_1)}{dz}, \end{cases}$$

d'où

$$\Delta^2 F = \frac{d}{dx}\left[\Phi + \frac{d\Psi_1}{dy} + \frac{dX_1}{dz}\right] = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2F}{dt^2},$$
$$\Delta^2 F_1 = \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{d\Psi}{dy} + \frac{dX}{dz} = \frac{1}{\omega^2}\frac{d^2F_1}{dt^2}.$$

Aux composantes du mouvement réfléchi c. à. d. aux quantités u_2, v_2, w_2 nous attribuons *les mêmes valeurs,* avec la seule différence de prendre x toujours négatif.

En supposant, que

$$(18.) \quad [F]^{x=0} = 0, \quad \left[\frac{dF_1}{dx}\right]^{x=0} = 0,$$

nous trouverons

$$[u + u_2 - u_1]^{x=0} = [u]^{x=0} - 2\varphi_1(t, y, z) = 0,$$
$$[v + v_2 - v_1]^{x=0} = [v]^{x=0} - 2\psi_1(t, y, z) = 0,$$
$$[w + w_2 - w_1]^{x=0} = [w]^{x=0} - 2\chi_1(t, y, z) = 0,$$
$$\left[\frac{d(u+u_2-u_1)}{dx}\right]^{x=0} = \left[\frac{du}{dx}\right]^{x=0} - 2\varphi\,(t, y, z) = 0,$$
$$\left[\frac{d(v+v_2-v_1)}{dx}\right]^{x=0} = \left[\frac{dv}{dx}\right]^{x=0} - 2\psi\,(t, y, z) = 0,$$
$$\left[\frac{d(w+w_2-w_1)}{dx}\right]^{x=0} = \left[\frac{dw}{dx}\right]^{x=0} - 2\chi\,(t, y, z) = 0.$$

Les fonctions φ, φ_1, etc. seront donc déterminées, et maintenant on vérifiera aisément les équations (18.). Si par exemple le mouvement direct forme une onde plane, on trouvera pour l'onde transmise à des distances assez grandes de l'ouverture les mêmes expressions, qu'a déjà trouvées M. *Stokes* d'une manière moins rigoureuse.

4.

Tuyaux sonores.

Considérons maintenant les petits mouvements vibratoires dans un corps élastique et complètement fluide entre des plans fixes qui permettent aux points contigus de faire librement tous les mouvements parallèles au plan en excluant le mouvement normal. Quand le corps élastique est complétement fluide, la constante μ est égale à zéro, et il n'y existe qu'une espèce de vibration, c'est-à-dire celle qui dépend de la vitesse Ω.

En désignant par u, v, w les composantes des déplacements, nous posons

$$\frac{dF}{dx} = u, \quad \frac{dF}{dy} = v, \quad \frac{dF}{dz} = w,$$

et donnons à la fonction F le nom de *potentiel* de l'onde ou du mouvement.

Supposons que le corps fluide soit renfermé dans un tuyau d'une longueur illimitée et à base rectangle. Faisons coïncider ses parois avec les plans coordonnés $(y=0)$ et $(z=0)$ et avec les plans parallèles à ces derniers $(y=b)$ et $(z=c)$. Le potentiel du mouvement direct et de tous les mouvements réfléchis pourra donc être de la forme

$$(19.) \quad \begin{cases} F = -\frac{1}{2\pi}\Sigma\Sigma\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma \frac{f\left(t-\frac{r}{\Omega}, \beta, \gamma\right)}{r}, \\ r = \sqrt{x^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2}, \end{cases}$$

$\Sigma\Sigma$ désignant la somme pour toutes les valeurs entières, négatives et positives, de i_1 et i_2, et le signe $\pm$, introduit par r dans la fonction F, ayant ici, comme dans ce qui suit une signification spéciale, définie par

$$\text{fonct.}(\pm) = \text{fonct.}(+) + \text{fonct.}(-).$$

Cette valeur de F satisfait à l'équation différentielle

$$\Delta^2 F = \frac{1}{\Omega^2}\frac{d^2F}{dt^2},$$

et donne

$$[u]^{x=0} = f(t, y, z), \quad [v]^{y=0} = 0, \quad [v]^{y=b} = 0, \quad [w]^{z=0} = 0, \quad [w]^{z=c} = 0.$$



Supposons à présent que le tuyau soit limité, qu'il soit coupé normalement à l'axe et forme un prisme droit de la longueur a. Faisons coïncider avec le plan coordonné ($x=0$) son premier bout qui pourra être fermé ou ouvert, mais supposons que l'autre bout soit ouvert. Cela posé, le mouvement produit au premier bout se propagera à l'autre bout ouvert, et là il sera en partie réfléchi, en partie transmis au corps fluide illimité qui se trouve hors du tuyau.

Les composantes des vibrations réfléchies étant

$$u_2 = \frac{dF_2}{dx}, \quad v_2 = \frac{dF_2}{dy}, \quad w_2 = \frac{dF_2}{dz},$$

et celles des vibrations transmises

$$u_1 = \frac{dF_1}{dx}, \quad v_1 = \frac{dF_1}{dy}, \quad w_1 = \frac{dF_1}{dz},$$

nous aurons, comme dans le numéro précédent, les conditions suivantes:

$$(20.) \qquad [F + F_2 - F_1]^{x=a} = 0,$$

$$(21.) \qquad \left[\frac{d(F+F_2-F_1)}{dx}\right]^{x=a} = 0.$$

Posons maintenant

$$(22.) \qquad \begin{cases} F_2 = \dfrac{1}{2\pi}\Sigma\Sigma\displaystyle\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma \frac{f_2\left(t-\frac{r}{\Omega}, \beta, \gamma\right)}{r}, \\ r = \sqrt{(x-a)^2+(y+2i_1 b\pm\beta)^2+(z+2i_2 c\pm\gamma)^2}, \end{cases}$$

et

$$(23.) \qquad \begin{cases} F_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma \frac{f_1\left(t-\frac{r}{\Omega}, \beta, \gamma\right)}{r}, \\ r = \sqrt{(x-a)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}. \end{cases}$$

Ces valeurs de F_2 et F_1, introduites dans (21.), nous donnent l'équation

$$(24.) \qquad \left[\frac{dF}{dx}\right]^{x=a} + f_2(t, y, z) - f_1(t, y, z) = 0$$

par laquelle on peut éliminer l'une des fonctions f_1 ou f_2; l'autre doit donc être déterminée par l'équation (20.).

Mais, en général, on ne peut pas effectuer cette détermination. Nous chercherons donc une solution approximative, en supposant, que tous les déplacements entre les parois du tuyau se fassent seulement dans la direction de l'axe du tuyau. Cette hypothèse, qui ne s'accorde pas exactement avec l'équation (20.), nous conduira au résultat le plus juste, si nous égalons à zéro

la somme des erreurs pour toutes les valeurs des y et z. L'équation (20.) doit donc être remplaçée par cette autre

$$(25.)\quad \int_0^b dy \int_0^c dz\,[F + F_2 - F_1]^{x=a} = 0.$$

Maintenant le calcul peut s'étendre à des tuyaux d'une base quelconque, et nous pouvons poser

$$(26.)\quad F = h\cos k(\Omega t - x),$$

$$(27.)\quad F_2 = h_2 \cos k(\Omega t + x - 2a - \Delta),$$

$$(28.)\quad \begin{cases} F_1 = -\frac{1}{2\pi} h_1 k \int d\beta \int d\gamma \frac{\sin k(\Omega t - r - a - \delta)}{r}, \\ r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}, \end{cases}$$

en déterminant les constantes h_2, h_1, Δ, δ par les équations

$$(21.)\quad \left[\frac{d(F + F_2 - F_1)}{dx}\right]^{x=a} = 0$$

et

$$(29.)\quad \int dy \int dz\,[F + F_2 - F_1]^{x=a} = 0,$$

les intégrations devant être étendues jusqu'aux limites de la base.

En dévéloppant $\sin k(\Omega t - r - a - \delta)$ suivant les puissances ascendantes de r, on trouvera

$$\int dy \int dz\,[F_1]^{x=a} = h_1 B[-\varepsilon \sin k(\Omega t - a - \delta) + \varepsilon' \cos k(\Omega t - a - \delta)],$$

B étant l'aire de la base, ε et ε' des constantes positives. Nous aurons donc, en vertu des équations (21.) et (29.)

$$h\sin k(\Omega t - a) - h_2 \sin k(\Omega t - a - \Delta) = h_1 \sin k(\Omega t - a - \delta),$$

$$h\cos k(\Omega t - a) + h_2 \cos k(\Omega t - a - \Delta) = h_1[-\varepsilon \sin k(\Omega t - a - \delta) + \varepsilon' \cos k(\Omega t - a - \delta)].$$

En comparant les coefficients de $\sin k(\Omega t - a)$ et $\cos k(\Omega t - a)$, on trouve

$$(30.)\quad \operatorname{tg} k\Delta = \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2 - \varepsilon'^2},$$

$$(31.)\quad \begin{cases} h_2 = -\gamma h, \\ \gamma = \sqrt{\frac{(1-\varepsilon')^2 + \varepsilon^2}{(1+\varepsilon')^2 + \varepsilon^2}}. \end{cases}$$

Supposons d'abord que le premier bout du tuyau soit *fermé* par un plan fixe, dans ce cas le potentiel du mouvement primitif, produit d'une manière quelconque à l'autre bout, sera

$$h\cos k(\Omega t + x);$$



après la réflexion produite par le plan fixe ($x=0$) il deviendra

$$h\cos k(\Omega t-x),$$

or le potentiel de la somme de ces deux mouvements sera

$$2h\cos k\Omega t\cos kx.$$

Lorsque les réflexions de la première onde se sont répétées n fois au bout ouvert, le potentiel sera

$$2h\cos kx[\cos k\Omega t-\gamma\cos k(\Omega t-2a-\varDelta)+\gamma^2\cos k(\Omega t-4a-2\varDelta)-\cdots$$
$$+(-\gamma)^n\cos k(\Omega t-n(2a+\varDelta))].$$

Pour $n=\infty$ cette expression converge vers la limite

$$(32.)\qquad 2\frac{h}{\varrho}\cos kx\cos(k\Omega t+\theta),$$

où l'on a posé

$$\varrho=\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma\cos k(2a+\varDelta)},\qquad \sin\theta=\frac{\gamma}{\varrho}\sin k(2a+\varDelta).$$

Cette valeur du potentiel aura son maximum pour

$$k(2a+\varDelta)\;=\;(2p+1)\pi,$$

p étant un nombre entier. En désignant par $\lambda=\frac{2\pi}{k}$ la longueur d'une onde entière, le mouvement vibratoire aura donc sa plus grande force, quand on a

$$(33.)\qquad \lambda=\frac{4a+2\varDelta}{2p+1}\quad\text{ou}\quad a+\frac{\varDelta}{2}=\frac{\lambda}{4},\quad\frac{3\lambda}{4},\quad\frac{5\lambda}{4}\quad\ldots.$$

Dans ce cas la valeur du potentiel (32.) devient

$$(34.)\qquad 2\frac{h}{1-\gamma}\cos kx\cos k\Omega t.$$

Supposons en second lieu que les deux bouts du tuyau soient *ouverts*, et que le mouvement se produise au second bout ($x=a$), le potentiel du mouvement primitif sera

$$h\cos k(\Omega t+x).$$

Après la réflexion qui a lieu au premier bout ouvert ($x=0$), il devient

$$-h\gamma\cos k(\Omega t-x-\varDelta),$$

le potentiel de la somme de ces deux mouvements sera donc

$$h[\cos k(\Omega t+x)-\gamma\cos k(\Omega t-x-\varDelta)].$$

Lorsque les réflexions se sont répétées un nombre infini de fois, le potentiel sera

$$(35.)\qquad \frac{h}{\varrho}[\cos k(\Omega t+x-\theta)-\gamma\cos k(\Omega t-x-\varDelta-\theta)],$$

où l'on a posé

$$\varrho=\sqrt{1+\gamma^4-2\gamma^2\cos 2k(a+\varDelta)},\qquad \sin\theta=\frac{\gamma^2}{\varrho}\sin 2k(a+\varDelta).$$

Le mouvement aura donc sa plus grande force, quand on a

$$2k(a+\Delta) = 2p\pi,$$

d'où

$$(36.) \qquad \lambda = \frac{2(a+\Delta)}{p} \quad \text{ou} \quad a+\Delta = \frac{\lambda}{2}, \ \frac{2\lambda}{2}, \ \frac{3\lambda}{2} \ \ldots\ldots$$

Dans ce cas la valeur du potentiel (35.) devient

$$(37.) \qquad -\frac{h}{1-\gamma}\sin k\Omega t \sin kx + \frac{h}{1+\gamma}\cos k\Omega t \cos kx.$$

On voit par la valeur (32.) du potentiel que dans le cas où l'un des bouts du tuyau est fermé, il y aura des noeuds ou des points parfaitement immobiles, savoir ceux qui donnent $\sin kx = 0$, tandis qu'au contraire dans le cas (37.) où les deux bouts sont ouverts, on ne pourra dire que d'une manière approximative qu'il y a des points immobiles. Pour ces points on a $\cos kx = 0$.

Si le tuyau est cylindrique, R étant le rayon de la section circulaire normale à l'axe, on trouvera

$$\varepsilon = \sum_{n=0}^{n=\infty} (kR)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\frac{3}{2})\Gamma(n+\frac{5}{2})},$$

$$\varepsilon' = \sum_{n=0}^{n=\infty} (kR)^{2n+2} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+2)\Gamma(n+3)}.$$

Pour des valeurs très petites de kR on aura

$$\varepsilon = \frac{8}{3\pi}kR, \qquad \varepsilon' = 0,$$

d'où par l'équation (30.)

$$\Delta = \frac{16}{3\pi}R.$$

Pour un tuyau ouvert aux deux bouts on aura donc

$$\frac{\frac{1}{2}\lambda p - a}{2R} = \frac{8}{3\pi} = 0{,}8488.$$

Ce résultat est parfaitement confirmé par les expériences de M. *Zamminer* (Ann. de *Pogg.* 97), qui pour un tuyau ouvert aux deux bouts, d'une longueur de 500^{mm} et d'un diamètre (d) de 25^{mm}, a trouvé

$$\tfrac{1}{2}\lambda = 522{,}2, \qquad \text{d'où} \quad \frac{\frac{1}{2}\lambda - a}{d} = 0{,}848.$$

Dans le tableau suivant j'ai calculé la valeur de $\frac{\Delta}{d}$ pour différentes valeurs de $2R$ ou d, divisé par $\frac{1}{2}\lambda$.

$\frac{2d}{\lambda}$	$\frac{\Delta}{d}$	$\frac{2d}{\lambda}$	$\frac{\Delta}{d}$
0,00	0,8488	0,40	0,7293
0,05	0,8462	0,45	0,7080
0,10	0,8385	0,50	0,6873
0,15	0,8263	0,55	0,6672
0,20	0,8106	0,60	0,6480
0,25	0,7921	0,65	0,6298
0,30	0,7720	0,70	0,6125
0,35	0,7508	0,75	0,5962

Si l'on applique les chiffres de ce tableau aux données de l'expérience que nous venons de citer, on aura plus exactement: $\frac{\frac{1}{4}\lambda - a}{d} = 0,8463$.

Les expériences de M. *Wertheim* (Ann. de chim. et de phys. 31) donnent, pour les tuyaux cylindriques ouverts aux deux bouts, $\frac{\Delta}{d} = 2\sqrt{\pi}.0,187 = 0,663$, indépendamment du diamètre, tandis que M. *Zaminer* trouve, que la valeur de $\frac{\Delta}{d}$ diminue, quand le diamètre devient plus grand. Ses expériences donnent cependant un décroissement plus fort, que ne le donne le calcul, dont les résultats sont par conséquent compris entre ceux de ces deux physiciens. Les expériences faites sur des tuyaux fermés ne s'accordent pas avec les résultats du calcul, sans doute parceque le fond du tuyau n'est pas complètement immobile.

Il y a encore beaucoup d'autres problèmes, dont la solution serait importante, mais on ne serait pas à même de contrôler les résultats du calcul au moyen d'expériences. La difficulté que l'on éprouve dans les expériences de s'approcher des suppositions mathématiques, a empêché jusqu'à présent un accord suffisant entre leurs résultats.

5.

Equilibre du prisme rectangulaire.

Considérons un corps homogène, à élasticité constante, qui soit limité par les trois plans coordonnés, et par trois autres plans parallèles aux premiers, dans les distances *a, b* et *c*. Si les données relatives aux déplacements des points situés dans les six faces ou aux forces extérieures, qui agissent sur ces faces suffisent pour déterminer complètement l'équilibre intérieur, il faudra résoudre le problème de déterminer par les données tous les déplacements et

toutes les forces élastiques qui se produisent dans chaque point du corps. Nous allons nous borner ici aux deux cas, qui permettent une solution exacte. Dans le premier cas les déplacements normaux et les forces tangentielles, dans le second les déplacements tangentiels et les forces normales sont donnés, pour les points situés dans les six faces. — On admet que les valeurs des forces données sont compatibles avec les conditions qu'exige l'équilibre *extérieur* du corps.

Posons

$$(38.)\quad \begin{cases} F = -\frac{1}{2\pi}\Sigma\Sigma\Sigma\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\left[\frac{f(\beta,\gamma)}{r}-\frac{f_1(\beta,\gamma)}{r_1}\right], \\ r = \sqrt{(x+2ia)^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2}, \\ r_1 = \sqrt{(x+(2i+1)a)^2+(y+2i_1b\pm\beta)^2+(z+2i_2c\pm\gamma)^2}, \end{cases}$$

où le signe $\pm$ a la même signification qu'auparavant, et où la sommation se rapporte aux trois nombres i, i_1, i_2 dont chacun prend toutes les valeurs entières, positives et négatives, de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Il est évident par ce qui précède que la fonction F vérifie les équations suivantes:

$$\triangle^2 F = 0,$$

$$\left[\frac{dF}{dx}\right]^{x=0} = f(y,z), \qquad \left[\frac{dF}{dx}\right]^{x=a} = f_1(y,z),$$

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]^{y=0,b} = 0, \qquad \left[\frac{dF}{dz}\right]^{z=0,c} = 0.$$

Introduisons encore, en conservant les mêmes notations, la fonction

$$(39.)\quad F_2 = -\frac{1}{2\pi}\Sigma\Sigma\Sigma\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma\left[\frac{r}{2}f(\beta,\gamma)-\frac{r_1}{2}f_1(\beta,\gamma)\right],$$

elle satisfera aux équations

$$\triangle^2 F_2 = F,$$

$$\left[\frac{dF_2}{dy}\right]^{y=0,b} = 0, \qquad \left[\frac{dF_2}{dz}\right]^{z=0,c} = 0;$$

et l'on trouvera en outre

$$\left[\frac{d^3F_2}{dx^3}\right]^{x=0} = f(y,z), \qquad \left[\frac{d^3F_2}{dx^3}\right]^{x=a} = f_1(y,z),$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\left[\frac{dF_2}{dx}\right]^{x=0,a} = 0, \qquad \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{dF_2}{dx}\right]^{x=0,a} = 0.$$

Bien que les expressions F et F_2 aient des valeurs infinies, cette circonstance

n'infirmera en rien l'exactitude des développements ultérieurs, car on ne se servira que de celles des dérivées de ces expressions qui restent finies.

Si l'on transforme la valeur de $\frac{dF}{dx}$, soit en remplaçant la triple somme par une intégrale triple, soit en développant $f(\beta,\gamma)$ et $f_1(\beta,\gamma)$ suivant les cosinus des multiples de l'arc $\frac{\pi\beta}{b}$ et de l'arc $\frac{\pi\gamma}{c}$, on parviendra à une autre expression, dont l'intégrale par rapport à x est

$$(40.)\quad \begin{cases} F = -\frac{1}{bc}\Sigma\Sigma\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma \frac{\cos\frac{\pi i_1 y}{b}\cos\frac{\pi i_2 z}{c}\cos\frac{\pi i_1\beta}{b}\cos\frac{\pi i_2\gamma}{c}}{p(e^{pa}-e^{-pa})} \\ \qquad\times[(e^{p(a-x)}+e^{-p(a-x)})f(\beta,\gamma)-(e^{px}+e^{-px})f_1(\beta,\gamma)], \end{cases}$$

où

$$p = \pi\sqrt{\frac{i_1^2}{b^2}+\frac{i_2^2}{c^2}}.$$

Cette valeur de F qui est finie, satisfait aux mêmes conditions que l'on vient d'écrire pour la valeur (38.) de F. On trouve pour F_2 une valeur correspondante qui est finie, savoir:

$$(41.)\quad \begin{cases} F_2 = -\frac{1}{bc}\Sigma\Sigma\int_0^b d\beta\int_0^c d\gamma \frac{\cos\frac{\pi i_1 y}{b}\cos\frac{\pi i_2 z}{c}\cos\frac{\pi i_1\beta}{b}\cos\frac{\pi i_2\gamma}{c}}{2p^2(e^{pa}-e^{-pa})} \\ \times\left[\begin{array}{l}\Big((a-x)(e^{p(a-x)}-e^{-p(a-x)})-\Big(a\frac{e^{pa}+e^{-pa}}{e^{pa}-e^{-pa}}+\frac{1}{p}\Big)(e^{p(a-x)}+e^{-p(a-x)})\Big)f(\beta,\gamma) \\ -\Big(x(e^{px}-e^{-px})-\Big(a\frac{e^{pa}+e^{-pa}}{e^{pa}-e^{-pa}}+\frac{1}{p}\Big)(e^{px}+e^{-px})\Big)f_1(\beta,\gamma)\end{array}\right] \end{cases}$$

Introduisons en outre les fonctions $\mathfrak{F}$ et Φ en les faisant respectivement dépendre de $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ et de φ, φ_1 de la même manière que F dépend de f, f_1. Introduisons enfin les fonctions $\mathfrak{F}'$ et Φ', qui dépendront des mêmes fonctions $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}_1$ et φ, φ_1 et qui ne différeront des expressions de $\mathfrak{F}$ et Φ contenues dans les équations analogues à (38.) que par l'acceptation du signe $\pm$. Nous distinguerons le nouveau sens qu'il faut attribuer à ce signe dans les sommes où il se trouve, en l'écrivant $[\pm]$, et en y attachant la signification définie par l'équation

$$\text{fonct.}([\pm]) = \text{fonct.}(+) - \text{fonct.}(-).$$

Il y a des valeurs finies de $\mathfrak{F}'$, Φ' semblables aux valeurs de $\mathfrak{F}$, Φ qui sont contenues dans les équations analogues à (40.). On arrive à ces nouvelles valeurs en remplaçant dans $\mathfrak{F}$, Φ tous les cosinus par des sinus. On voit

aisément que l'on aura

$$\mathfrak{F}' = 0 \text{ et } \Phi' = 0 \text{ pour } y = 0,\ y = b,\ z = 0,\ z = c, \text{ et}$$

$$\left[\frac{d\mathfrak{F}'}{dx}\right]^{x=0} = \mathfrak{f}(y, z), \qquad \left[\frac{d\mathfrak{F}'}{dx}\right]^{x=a} = \mathfrak{f}_1(y, z),$$

$$\left[\frac{d\Phi'}{dx}\right]^{x=0} = \varphi(y, z), \qquad \left[\frac{d\Phi'}{dx}\right]^{x=a} = \varphi_1(y, z).$$

Posons maintenant

$$(42.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{d}{dx}\left[\mathfrak{F} + (2+\varepsilon)F - (1+\varepsilon)\dfrac{d^2F_2}{dx^2}\right], \\ v = \dfrac{d}{dy}\left[\mathfrak{F} + \quad \varepsilon F \quad - (1+\varepsilon)\dfrac{d^2F_2}{dx^2}\right] + 2\dfrac{d\Phi'}{dz}, \\ w = \dfrac{d}{dz}\left[\mathfrak{F} + \quad \varepsilon F \quad - (1+\varepsilon)\dfrac{d^2F_2}{dx^2}\right] - 2\dfrac{d\Phi'}{dy}, \end{cases}$$

où

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}.$$

Ces valeurs des composantes, qui satisfont aux équations de l'équilibre, donnent

$$[u]^{x=0} = f(y, z) + \mathfrak{f}(y, z), \qquad [u]^{x=a} = f_1(y, z) + \mathfrak{f}_1(y, z),$$

$$\left[\frac{1}{2\mu}T_2\right]^{x=0} = \frac{d\mathfrak{f}(y, z)}{dz} - \frac{d\varphi(y, z)}{dy}, \qquad \left[\frac{1}{2\mu}T_2\right]^{x=a} = \frac{d\mathfrak{f}_1(y, z)}{dz} - \frac{d\varphi_1(y, z)}{dy},$$

$$\left[\frac{1}{2\mu}T_3\right]^{x=0} = \frac{d\mathfrak{f}(y, z)}{dy} + \frac{d\varphi(y, z)}{dz}, \qquad \left[\frac{1}{2\mu}T_3\right]^{x=a} = \frac{d\mathfrak{f}_1(y, z)}{dy} + \frac{d\varphi_1(y, z)}{dz},$$

tandis que les déplacements normaux et les forces tangentielles qui se rapportent aux points situés dans les autres faces du prisme sont nuls. Les six fonctions f, $\mathfrak{f}$ etc. seront donc déterminées par les dernières six équations, et, si l'on connaît les déplacements normaux et les forces tangentielles qui se rapportent aux points situés dans les deux faces $(x = 0)$ et $(x = a)$, les composantes des déplacements qui en dépendent, seront déterminées par les équations (42.) De la même manière on trouvera les composantes des déplacements produits par des déplacements normaux et des forces tangentielles qui se rapportent aux points situés dans les autres faces du prisme. Il est bon de remarquer, que la solution que l'on vient de donner contient des fonctions arbitraires; elles y entrent par la détermination de $\mathfrak{f}(y, z)$, $\mathfrak{f}_1(y, z)$, $\varphi(y, z)$ et $\varphi_1(y, z)$.

Lorsqu'il s'agit de résoudre le problème inverse dans lequel les forces normales et les déplacements tangentiels pour les points situés dans les six faces sont donnés, on formera les composantes des déplacements qui dépendent

des forces normales et des déplacements tangentiels relatifs aux points situés dans les deux faces $(x=0)$ et $(x=a)$; elles sont données par les équations:

$$(43.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{d^2}{dy\,dz}\left[\;2F-(1+\varepsilon)\dfrac{d^2F_2}{dx^2}\right]+\dfrac{d^2\mathfrak{F}'}{dx^2}, \\ v = \dfrac{d^2}{dx\,dz}\left[\;\Phi-(1+\varepsilon)\dfrac{d^2F_2}{dy^2}\right]+\dfrac{d^2\mathfrak{F}'}{dx\,dy}, \\ w = \dfrac{d^2}{dx\,dy}\left[-\Phi-(1+\varepsilon)\dfrac{d^2F_2}{dz^2}\right]+\dfrac{d^2\mathfrak{F}'}{dx\,dz}. \end{cases}$$

Ces valeurs des composantes, qui satisfont aux équations de l'équilibre, donnent

$$\left[\frac{1}{2\mu}N_1\right]^{x=0} = \frac{d^2f(y,z)}{dy\,dz}-\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\mathfrak{f}(y,z),$$

$$\left[\frac{1}{2\mu}N_1\right]^{x=a} = \frac{d^2f_1(y,z)}{dy\,dz}-\left(\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\mathfrak{f}_1(y,z),$$

$$[v]^{x=0} = \frac{d\mathfrak{f}(y,z)}{dy}+\frac{d\varphi(y,z)}{dz},$$

$$[v]^{x=a} = \frac{d\mathfrak{f}_1(y,z)}{dy}+\frac{d\varphi_1(y,z)}{dz},$$

$$[w]^{x=0} = \frac{d\mathfrak{f}(y,z)}{dz}-\frac{d\varphi(y,z)}{dy},$$

$$[w]^{x=a} = \frac{d\mathfrak{f}_1(y,z)}{dz}-\frac{d\varphi_1(y,z)}{dy},$$

tandis que les forces normales et les déplacements tangentiels qui se rapportent aux points situés dans les autres faces sont nuls. On pourra donc déterminer les fonctions f, $\mathfrak{f}$ etc. par les dernières six équations et le problème sera résolu.

Copenhague, 28 novembre 1860.

Des coordonnées curvilignes se coupant sous un angle quelconque.

(Par M. l'abbé *Aoust* à Marseille.)

L'usage des coordonnées curvilignes orthogonales a été introduit dans l'analyse par M. *Lamé*. Cet éminent géomètre a démontré les principales propriétés de ce système de coordonnées, et a donné les formules de transformation pour passer du système rectiligne au système curviligne orthogonal.

Il ne serait pas sans utilité de connaître les formules analogues dans le cas où les coordonnées curvilignes se coupent sous un angle quelconque, variant avec la position du point. Ces formules feraient connaître les propriétés de chaque système, et les avantages qui lui seraient propres. La recherche de formules aussi générales présente une certaine complication parce-qu'elles doivent contenir: 1° les cosinus des angles des courbes coordonnées, 2° les variations de ces angles par rapport aux paramètres qui fixent la position du point. Ces deux sortes de quantités sont nulles dans le système orthogonal. Cette recherche peut être partagée en deux parties: la première relative au cas où les courbes coordonnées sont planes, la seconde relative au cas où les courbes coordonnées sont tracées sur une surface quelconque. Nous allons nous occuper du premier cas. Les propriétés des coordonnées curvilignes tracées sur une surface se déduisent des propriétés des coordonnées curvilignes planes.

I.

Soit $\varrho = f(x, y)$ l'équation d'une courbe plane rapportée à des coordonnées rectilignes rectangles, ϱ étant un paramètre qui reçoit différentes valeurs, x, y les coordonnées courantes. La série des courbes (ϱ) est la série des courbes que l'on obtient en donnant à ϱ une suite de valeurs différentes. Si l'on donne une autre courbe située dans le même plan $\varrho_1 = f_1(x, y)$, ainsi que la série des courbes (ϱ_1), tout point situé dans le plan sera déterminé par l'intersection d'une des courbes de la série (ϱ) par une des courbes de la série (ϱ_1). Le système est *orthogonal* lorsque les deux séries se coupent sous un angle droit. Or, à moins que les courbes (ϱ) et (ϱ_1) ne satisfassent à certaines conditions d'espèce et de position, l'angle sous lequel elles se

couperont ne sera ni droit, ni constant, il variera de grandeur suivant la position du point, le système des coordonnées est alors oblique sous un angle variable.

Soient deux systèmes de courbes planes représentées par les équations:

$$(1.)\qquad \varrho = f(x, y), \quad \varrho_1 = f_1(x, y)$$

appelons h, h_1 leurs paramètres différentiels du 1er ordre, k le cosinus de l'angle sous lequel les courbes (ϱ), (ϱ_1) se coupent. L'on sait que les paramètres différentiels h, h_1 sont donnés par les relations

$$(2.)\qquad \frac{d\varrho^2}{dx^2}+\frac{d\varrho^2}{dy^2} = h^2, \qquad \frac{d\varrho_1^2}{dx^2}+\frac{d\varrho_1^2}{dy^2} = h_1^2,$$

et que le cosinus k est donné par

$$(3.)\qquad \frac{d\varrho}{dx}\frac{d\varrho_1}{dx}+\frac{d\varrho}{dy}\frac{d\varrho_1}{dy} = khh_1.$$

Appelons $d\sigma$, $d\sigma_1$ les élémens différentiels des arcs des courbes coordonnées ϱ_1, ϱ, posons pour abréger $m = khh_1$, $l^2 = h^2h_1^2 - m^2$, proposons nous d'exprimer ces arcs en fonction des paramètres différentiels du 1er ordre, et de k.

Si l'on tire les valeurs de x et de y en fonction de ϱ, ϱ_1 des équations (1.), et qu'on les différentie, l'on aura identiquement:

$$dx = \frac{dx}{d\varrho}\Big(\frac{d\varrho}{dx}dx+\frac{d\varrho}{dy}dy\Big)+\frac{dx}{d\varrho_1}\Big(\frac{d\varrho_1}{dx}dx+\frac{d\varrho_1}{dy}dy\Big),$$

on en déduit les relations suivantes:

$$1 = \frac{dx}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dx}+\frac{dx}{d\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dx}, \qquad 0 = \frac{dx}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dy}+\frac{dx}{d\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dy},$$

on trouverait de même:

$$1 = \frac{dy}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dy}+\frac{dy}{d\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dy}, \qquad 0 = \frac{dy}{d\varrho}\frac{d\varrho}{dx}+\frac{dy}{d\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{dx}.$$

Si l'on multiplie la première et la seconde de ces équations respectivement par $\frac{d\varrho}{dx}$ et $\frac{d\varrho}{dy}$, puis par $\frac{d\varrho_1}{dx}$ et $\frac{d\varrho_1}{dy}$ et qu'on ajoute, l'on aura

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varrho}{dx} = h^2\dfrac{dx}{d\varrho}+m\dfrac{dx}{d\varrho_1}, \qquad \dfrac{d\varrho_1}{dx} = m\dfrac{dx}{d\varrho}+h_1^2\dfrac{dx}{d\varrho_1}, \\ \text{on trouverait de même:} \\ \dfrac{d\varrho}{dy} = h^2\dfrac{dy}{d\varrho}+m\dfrac{dy}{d\varrho_1}, \qquad \dfrac{d\varrho_1}{dy} = m\dfrac{dy}{d\varrho}+h_1^2\dfrac{dy}{d\varrho_1}. \end{cases}$$

De ces équations l'on déduit les valeurs des dérivées: $\frac{dx}{d\varrho}$, $\frac{dy}{d\varrho}$, $\frac{dx}{d\varrho_1}$, $\frac{dy}{d\varrho_1}$,

$$(4.)' \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\varrho} = \dfrac{h_1^2}{l^2}\dfrac{d\varrho}{dx} - \dfrac{m}{l^2}\dfrac{d\varrho_1}{dx}, & \dfrac{dy}{d\varrho} = \dfrac{h_1^2}{l^2}\dfrac{d\varrho}{dy} - \dfrac{m}{l^2}\dfrac{d\varrho_1}{dy}, \\ \dfrac{dx}{d\varrho_1} = \dfrac{h^2}{l^2}\dfrac{d\varrho_1}{dx} - \dfrac{m}{l^2}\dfrac{d\varrho}{dx}, & \dfrac{dy}{d\varrho_1} = \dfrac{h^2}{l^2}\dfrac{d\varrho_1}{dy} - \dfrac{m}{l^2}\dfrac{d\varrho}{dy}, \end{cases}$$

or, l'on a:

$$d\sigma^2 = \left(\frac{dx^2}{d\varrho^2} + \frac{dy^2}{d\varrho^2}\right)d\varrho^2.$$

Si l'on porte dans cette expression les valeurs de $\frac{dx}{d\varrho}$, $\frac{dy}{d\varrho}$ tirées de (4.)', l'on trouvera $\frac{d\sigma^2}{d\varrho^2} = \frac{h_1^2}{l^2}$, on trouverait de même $\frac{d\sigma_1^2}{d\varrho^2} = \frac{h^2}{l^2}$. On en déduit, θ étant l'angle des courbes coordonnées,

$$(5.) \quad \frac{d\sigma}{d\varrho} = \frac{1}{h\sin\theta}, \quad \frac{d\sigma_1}{d\varrho_1} = \frac{1}{h_1\sin\theta}.$$

Ce sont les valeurs des élémens différentiels des arcs des courbes coordonnées en fonction des paramètres de ces courbes, et de l'angle sous lequel elles se coupent.

II.

Nous nous proposons maintenant d'obtenir les variations des coefficients différentiels $\frac{d\varrho}{dx}$, $\frac{d\varrho_1}{dx}$ par rapport aux paramètres ϱ, ϱ_1. Ce calcul se fait plus simplement de la manière suivante.

Soit généralement F une fonction quelconque de x et de y, et conséquemment de ϱ, ϱ_1, l'on aura:

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{d\varrho} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{d\varrho},$$

si l'on remplace $\frac{dx}{d\varrho}$, $\frac{dy}{d\varrho}$ par leurs valeurs tirées des équations (4.)' l'on aura:

$$\frac{dF}{d\varrho} = \frac{h_1^2}{l^2}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{d\varrho}{dy}\right) - \frac{m}{l^2}\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\varrho_1}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{d\varrho_1}{dy}\right).$$

Si l'on représente par R, R_1 les parties qui sont entre parenthèses, l'équation précédente qui donne la valeur de $\frac{dF}{d\varrho}$, et celle qui donnerait la valeur de $\frac{dF}{d\varrho_1}$ seront

$$(6.) \quad \frac{dF}{d\varrho} = \frac{h_1^2}{l^2}R - \frac{m}{l^2}R_1, \quad \frac{dF}{d\varrho_1} = \frac{h^2}{l^2}R_1 - \frac{m}{l^2}R.$$

Or, si l'on compare ces équations aux équations (4.)', on voit qu'elles se

composent en $\frac{dF}{d\varrho}$, $\frac{dF}{d\varrho_1}$, R, R_1 comme les équations (4.)' se composent en $\frac{dx}{d\varrho}$, $\frac{dx}{d\varrho_1}$, $\frac{d\varrho}{dx}$, $\frac{d\varrho_1}{dx}$; il en résulte que les valeurs de R, R_1 sont données par

$$(6.)' \qquad R = h^2\frac{dF}{d\varrho}+m\frac{dF}{d\varrho_1}, \qquad R_1 = h_1^2\frac{dF}{d\varrho_1}+m\frac{dF}{d\varrho},$$

qui sont analogues aux équations (4.).

C'est au moyen des formules (6.), (6.)' que nous venons d'obtenir, que nous ferons les transformations suivantes.

Différentions l'équation (3.) par rapport à x, nous obtiendrons:

$$\left[\frac{d\varrho}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)+\frac{d\varrho}{dy}\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)\right]+\left[\frac{d\varrho_1}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)+\frac{d\varrho_1}{dy}\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)\right] = \frac{dm}{dx},$$

or, les parties qui sont entre accolades ont la même composition que R, R_1. Ces dernières deviennent identiques aux premières lorsque dans R l'on remplace F par $\frac{d\varrho_1}{dx}$, et que dans R_1 l'on remplace F par $\frac{d\varrho}{dx}$. Donc les parties entre accolades seront données par les seconds membres des équations (6.)' pourvu qu'on remplace dans la 1ière, F par $\frac{d\varrho_1}{dx}$, et dans la seconde, F par $\frac{d\varrho}{dx}$. D'après cela, l'équation précédente s'écrira sous la forme:

$$(7.) \qquad h^2\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)+m\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)+m\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)+h_1^2\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) = \frac{dm}{dx}.$$

Les équations (2.) traitées de la même manière donneront les deux nouvelles relations:

$$(8.) \qquad m\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)+h_1^2\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right) = h_1\frac{dh_1}{dx},$$

$$(9.) \qquad m\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)+h^2\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) = h\frac{dh}{dx}.$$

Enfin, on obtiendra une quatrième relation en remarquant que les équations (4.)' qui donnent les valeurs de $\frac{dx}{d\varrho}$, $\frac{dx}{d\varrho_1}$ donneront deux résultats identiques, si l'on prend la dérivée de la première par rapport à ϱ_1, et la dérivée de la seconde par rapport à ϱ. Identifiant les deux résultats, et développant les dérivations, l'on aura:

$$(10.) \begin{cases} \quad h_1^2\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)-h^2\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)-m\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)+m\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) \\ = -l^2\frac{d\varrho}{dx}\left\{\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{h_1^2}{l^2}\right)+\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{m}{l^2}\right)\right\}+l^2\frac{d\varrho_1}{dx}\left\{\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{m}{l^2}\right)+\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{h^2}{l^2}\right)\right\}. \end{cases}$$

Ces quatre équations forment un système de quatre équations à quatre inconnues, on peut donc obtenir les valeurs de $\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)$, $\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)$, $\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)$, $\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right)$. La forme de ces équations permet d'en effectuer facilement la résolution; et si l'on remarque que $m = hh_1\cos\theta$, $l = hh_1\sin\theta$, l'on aura, en effectuant les calculs, et après quelques réductions,

$$(11.)\qquad \frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right) = M\frac{d\varrho}{dx} + N\frac{d\varrho_1}{dx}, \qquad \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) = M_1\frac{d\varrho_1}{dx} + N_1\frac{d\varrho}{dx},$$

$$(12.)\qquad \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{d\varrho_1}{dx}\right) = P\frac{d\varrho}{dx} + Q\frac{d\varrho_1}{dx}, \qquad \frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) = P_1\frac{d\varrho_1}{dx} + Q_1\frac{d\varrho}{dx},$$

dans lesquelles il faut poser:

$$M\sin^2\theta = \left(\frac{dh_1}{h_1 d\varrho} + \frac{h_1}{h^2}\frac{dh}{d\varrho_1}\cos\theta\right) + \operatorname{cotg}\theta\left(\frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{h_1}{h}\frac{d\theta}{d\varrho_1}\cos\theta\right),$$

$$\left(N - \frac{dh_1}{h_1 d\varrho_1}\right)\sin^2\theta = -\frac{h\cos\theta}{h_1}\left(\frac{dh_1}{h_1 d\varrho} + \frac{h_1}{h^2}\frac{dh}{d\varrho_1}\cos\theta\right) - \frac{h}{h_1}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{h_1}{h}\frac{d\theta}{d\varrho_1}\cos\theta\right),$$

$$P\sin^2\theta = -\frac{h_1^2}{h^2}\left(\frac{dh}{h\,d\varrho_1} + \frac{h}{h_1^2}\frac{dh_1}{d\varrho}\cos\theta\right) - \frac{h_1}{h\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{h_1}{h}\frac{d\theta}{d\varrho_1}\cos\theta\right),$$

$$Q\sin^2\theta = \left(\frac{dh_1}{h_1 d\varrho} + \frac{h_1}{h^2}\frac{dh}{d\varrho_1}\cos\theta\right) + \operatorname{cotg}\theta\left(\frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{h_1}{h}\frac{d\theta}{d\varrho_1}\cos\theta\right).$$

Les valeurs de M_1, N_1, P_1, Q_1 se déduisent des précédentes en y remplaçant h, ϱ par h_1, ϱ_1 et réciproquement.

Il est bon de remarquer 1° que les variations des dérivées $\frac{d\varrho}{dx}$, $\frac{d\varrho_1}{dx}$ par rapport aux paramètres ϱ, ϱ_1 sont linéaires par rapport à ces dérivées, 2° que les coefficients M, N, P, ... renferment trois sortes de termes: les premiers sont indépendants des cosinus de l'angle θ sous lequel se coupent les courbes coordonnées, les seconds dépendent du cosinus de cet angle, mais ne dépendent pas de ses variations, les troisièmes dépendent des variations de l'angle des courbes coordonnées.

On obtiendra les variations des dérivées $\frac{d\varrho}{dy}$, $\frac{d\varrho_1}{dy}$ par rapport aux paramètres ϱ, ϱ_1 en changeant x en y dans les équations (11.) et (12.).

III.

En calculant les rayons de courbure des deux courbes coordonnées en fonction des paramètres différentiels du 1er ordre nous avons trouvé une expression remarquable de ces rayons de courbure, et d'une grande utilité

dans la théorie qui nous occupe. C'est cette expression que nous allons faire connaître.

Soit γ_1 le rayon de courbure de la courbe ϱ dont l'arc est σ_1. Tout point situé sur ce rayon de courbure est donné par les équations

$$(p.) \qquad \gamma_1 \frac{d\varrho}{dx} = h(x'-x), \qquad \gamma_1 \frac{d\varrho}{dy} = h(y'-y).$$

Si x', y' représentent les coordonnées du centre de courbure, elles sont déterminées par l'équation de la normale, et par sa différentielle par rapport à ϱ_1. Ces équations sont:

$$(q.) \quad \begin{cases} (x'-x)\dfrac{d\varrho}{dy} - (y'-y)\dfrac{d\varrho}{dx} = 0, \\ (x'-x)\dfrac{d}{d\varrho_1}\left(\dfrac{d\varrho}{dy}\right) - (y'-y)\dfrac{d}{d\varrho_1}\left(\dfrac{d\varrho}{dx}\right) - \dfrac{dx}{d\varrho_1}\dfrac{d\varrho}{dy} + \dfrac{d\varrho}{dx}\dfrac{dy}{d\varrho_1} = 0; \end{cases}$$

éliminant $y'-y$ entre ces deux équations, l'on obtient:

$$(r.) \quad \frac{x'-x}{\frac{d\varrho}{dx}} \cdot \left\{ \frac{d\varrho}{dx}\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) - \frac{d\varrho}{dy}\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) \right\} = \frac{dx}{d\varrho_1}\frac{d\varrho}{dy} - \frac{dy}{d\varrho_1}\frac{d\varrho}{dx},$$

la première partie de cette équation se compose de deux facteurs dont le premier est donné par la première des équations ($p.$), tandisque le second se déduit de la seconde des équations (12.), et de son analogue en $\frac{d\varrho_1}{dy}$:

$$-h_1^2 \sin^2\theta \left\{ \frac{d\varrho}{dx}\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dy}\right) - \frac{d\varrho}{dy}\frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{d\varrho}{dx}\right) \right\}$$
$$= \left(\frac{d\varrho}{dx}\frac{d\varrho_1}{dy} - \frac{d\varrho}{dy}\frac{d\varrho_1}{dx}\right)\left\{ hh_1\left(\cos\theta\frac{dh}{h\,d\varrho_1} + \frac{d\theta}{\sin\theta\, d\varrho_1}\right) + h^2\left(\frac{dh_1}{h_1 d\varrho} + \operatorname{cotg}\theta\frac{d\theta}{d\varrho}\right) \right\},$$

enfin la seconde partie de l'équation ($r.$) se déduit des équations (4.):

$$\frac{dx}{d\varrho_1}\frac{d\varrho}{dy} - \frac{dy}{d\varrho_1}\frac{d\varrho}{dx} = \left(\frac{d\varrho_1}{dx}\frac{d\varrho}{dy} - \frac{d\varrho_1}{dy}\frac{d\varrho}{dx}\right)\frac{1}{h_1^2 \sin^2\theta}.$$

Substituons ces trois expressions dans l'équation en question, l'on aura:

$$(13.) \quad \frac{1}{\gamma_1} = h\left(\frac{dh_1}{h_1 d\varrho} + \frac{h_1 dh}{h^2 d\varrho_1}\cos\theta\right) + \frac{h_1}{\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{d\varrho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{d\theta}{d\varrho}\cos\theta\right),$$

on trouverait de même:

$$(14.) \quad \frac{1}{\gamma} = h_1\left(\frac{dh}{h\,d\varrho_1} + \frac{h}{h_1^2}\frac{dh_1}{d\varrho}\cos\theta\right) + \frac{h}{\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{h_1}{h}\frac{d\theta}{d\varrho_1}\cos\theta\right).$$

Telles sont les expressions des rayons de courbure que nous avions pour but d'établir. Dans le cas où l'angle θ est constant, les valeurs $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma_1}$ ne devant

pas contenir les variations de θ, se réduisent à

$$\frac{1}{\gamma_1}=h\Big(\frac{dh_1}{h_1\,d\varrho}+\frac{h_1}{h^2}\,\frac{dh}{d\varrho}\cos\theta\Big),\qquad \frac{1}{\gamma}=h_1\Big(\frac{dh}{h\,d\varrho_1}+\frac{h}{h_1^2}\,\frac{dh_1}{d\varrho}\cos\theta\Big).$$

Dans le système orthogonal $\cos\theta$ est nul, et l'on retombe sur les formules données par M. *Lamé*.

IV.

Les équations (11.) et (12.) prennent une forme simple lorsqu'on y introduit les rayons de courbure des courbes coordonnées en se servant des équations (13.) et (14.). Cette transformation se fait simplement comme il suit.

Posons $\frac{1}{h}\frac{d\varrho}{dx}=X$, $\frac{1}{h_1}\frac{d\varrho_1}{dx}=X_1$ dans les équations (11.) et (12.); elles deviendront

$$(11.)'\quad \frac{dX_1}{d\varrho_1}=\frac{h}{h_1}MX+\Big(N-\frac{dh_1}{h_1\,d\varrho_1}\Big)X_1,\qquad \frac{dX}{d\varrho}=\frac{h_1}{h}M_1X_1+\Big(N_1-\frac{dh}{h\,d\varrho}\Big)X,$$

$$(12.)'\quad \frac{dX_1}{d\varrho}=\frac{h}{h_1}PX+\Big(Q-\frac{dh_1}{h_1\,d\varrho}\Big)X_1,\qquad \frac{dX}{d\varrho_1}=\frac{h_1}{h}P_1X_1+\Big(Q_1-\frac{dh}{h\,d\varrho_1}\Big)X.$$

Or, si l'on a égard aux équations (13.) et (14.), les équations précédentes prendront la forme suivante:

$$(11.)''\quad\begin{cases}\dfrac{dX_1}{d\varrho_1}=\dfrac{\cos\theta}{h_1\sin^2\theta}\Big(\dfrac{X}{\gamma}-\dfrac{X_1}{\gamma_1}\Big)+\dfrac{h\,dh_1}{h_1^2\,d\varrho}X+\operatorname{cotg}\theta\dfrac{d\theta}{d\varrho_1}X_1,\\[2mm] \dfrac{dX}{d\varrho}=\dfrac{\cos\theta}{h\sin^2\theta}\Big(\dfrac{X_1}{\gamma_1}-\dfrac{X}{\gamma}\Big)+\dfrac{h_1\,dh}{h^2\,d\varrho_1}X+\operatorname{cotg}\theta\dfrac{d\theta}{d\varrho}X_1,\end{cases}$$

$$(12.)''\quad\begin{cases}\dfrac{dX_1}{d\varrho}=-\dfrac{1}{h\sin^2\theta}\Big(\dfrac{X}{\gamma}-\dfrac{X_1}{\gamma_1}\Big)-\dfrac{dh_1}{h_1\,d\varrho}X_1-\dfrac{h_1\,d\theta}{h\sin\theta\,d\varrho_1}X_1,\\[2mm] \dfrac{dX}{d\varrho_1}=-\dfrac{1}{h_1\sin^2\theta}\Big(\dfrac{X_1}{\gamma_1}-\dfrac{X}{\gamma}\Big)-\dfrac{dh}{h\,d\varrho_1}X-\dfrac{h\,d\theta}{h_1\sin\theta\,d\varrho}X.\end{cases}$$

Telles sont les expressions simplifiées des variations des dérivées $\frac{d\varrho}{dx}$, $\frac{d\varrho_1}{dx}$ par rapport aux paramètres ϱ, ϱ_1.

Les variations des paramètres différentiels h, h_1 par rapport aux paramètres ϱ, ϱ_1 se déduisent des équations (13.) et (14.). En effet ces équations sont linéaires par rapport à $\frac{dh}{d\varrho_1}$, $\frac{dh_1}{d\varrho}$; si on les résout par rapport à ces deux quantités, l'on trouvera:

$$\frac{h_1}{h}\sin^2\theta\frac{dh}{d\varrho_1}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_1}\cos\theta-h\sin\theta\frac{d\theta}{d\varrho},\qquad \frac{h}{h_1}\sin^2\theta\frac{dh_1}{d\varrho}=\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma}\cos\theta-h_1\sin\theta\frac{d\theta}{d\varrho_1},$$

et si l'on a égard aux équations (5.), l'on trouvera:

$$\frac{\sin\theta}{h}\frac{dh}{d\sigma_1} = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_1}\cos\theta - \frac{d\theta}{d\sigma}, \quad \frac{\sin\theta}{h_1}\frac{dh_1}{d\sigma} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\cos\theta - \frac{d\theta}{d\sigma_1}.$$

V.

Nous allons démontrer, au moyen des équations (11.)' et (12.)', une propriété des coordonnées curvilignes obliques laquelle sert de fondement à cette théorie.

Les équations (11.)', (12.)' sont linéaires par rapport à X, X_1 or, si l'on pose

$$hM = h_1\mathrm{M}, \qquad hP = h_1\mathrm{P}, \qquad h_1 M_1 = h\mathrm{M}_1, \qquad h_1 P_1 = h\mathrm{P}_1,$$

$$N - \mathrm{N} = \frac{dh_1}{h_1 d\varrho_1}, \quad N_1 - \mathrm{N}_1 = \frac{dh}{h d\varrho}, \quad Q - \mathrm{Q} = \frac{dh_1}{h_1 d\varrho}, \quad Q_1 - \mathrm{Q}_1 = \frac{dh}{h d\varrho_1},$$

l'on aura:

$$(11.)' \quad \frac{dX_1}{d\varrho_1} = \mathrm{M}X + \mathrm{N}X_1, \quad \frac{dX_1}{d\varrho} = \mathrm{P}X + \mathrm{Q}X_1,$$

$$(12.)' \quad \frac{dX}{d\varrho} = \mathrm{M}_1 X_1 + \mathrm{N}_1 X, \quad \frac{dX}{d\varrho_1} = \mathrm{P}_1 X_1 + \mathrm{Q}_1 X.$$

Si l'on différentie la première des équations (11.)' par rapport à ϱ, et la deuxième par rapport à ϱ_1, on aura deux expressions qui seront encore linéaires par rapport à X, X_1 lorsqu'on y aura remplacé les dérivées de X et de X_1 par rapport à ϱ, ϱ_1 par leurs valeurs tirées des équations (11.)', (12.)'. On trouve ainsi:

$$\frac{d^2X_1}{d\varrho\, d\varrho_1} = \left(\mathrm{M}\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}\mathrm{P} + \frac{d\mathrm{M}}{d\varrho}\right)X + \left(\mathrm{M}\mathrm{M}_1 + \mathrm{N}\mathrm{Q} + \frac{d\mathrm{N}}{d\varrho}\right)X_1,$$

$$\frac{d^2X_1}{d\varrho\, d\varrho_1} = \left(\mathrm{M}\mathrm{Q} + \mathrm{P}\mathrm{Q}_1 + \frac{d\mathrm{P}}{d\varrho_1}\right)X + \left(\mathrm{P}\mathrm{P}_1 + \mathrm{N}\mathrm{Q} + \frac{d\mathrm{Q}}{d\varrho_1}\right)X_1.$$

Si l'on égale ces deux valeurs, l'on obtient une expression de la forme $AX + BX_1 = 0$, nous pouvons donc écrire les deux équations

$$\frac{A}{h}\frac{d\varrho}{dx} + \frac{B}{h_1}\frac{d\varrho_1}{dx} = 0, \qquad \frac{A}{h}\frac{d\varrho}{dy} + \frac{B}{h_1}\frac{d\varrho_1}{dy} = 0.$$

Or comme l'expression $\frac{d\varrho}{dx}\frac{d\varrho_1}{dy} - \frac{d\varrho}{dy}\frac{d\varrho_1}{dx}$ est essentiellement différente de zéro ces deux équations entrainent les deux suivantes:

$$A = 0, \qquad B = 0.$$

Si l'on développe les calculs relatifs à ces deux conditions l'on aura:

$$(15.)\qquad A = M(N_1 - Q) + P(N - Q_1) + \frac{dM}{d\varrho} - \frac{dP}{d\varrho_1} = 0,$$

$$(16.)\qquad B = MM_1 - PP_1 + \frac{dN}{d\varrho} - \frac{dQ}{d\varrho_1} = 0,$$

or, l'on a, en ayant égard aux conditions (13.) et (14.),

$$M + \frac{d\theta}{d\varrho_1 \sin\theta} = \frac{1}{\gamma_1 h_1 \sin^2\theta}, \qquad N - \operatorname{cotg}\theta \frac{d\theta}{d\varrho_1} = -\frac{1}{\gamma_1 h_1}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

$$P = -\frac{1}{\gamma h \sin^2\theta}, \qquad Q = \frac{\cos\theta}{h\gamma\sin^2\theta}.$$

Les valeurs de M_1, N_1, P_1, Q_1 se déduisent des précédentes en changeant γ, h, ϱ en γ_1, h_1, ϱ_1 et réciproquement. D'après cela la relation (15.) devient, en y substituant les valeurs de M, N, P, ... et en réduisant,

$$\frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{h_1\gamma_1}\right) + \frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{1}{h\gamma}\right)\right\} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\left\{\frac{1}{\gamma_1 h_1}\frac{d\theta}{d\varrho} + \frac{1}{\gamma h}\frac{d\theta}{d\varrho_1}\right\} = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1},$$

laquelle peut s'écrire sous la forme plus simple

$$(17.)\qquad \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{h_1\gamma_1\sin\theta}\right) + \frac{d}{d\varrho_1}\left(\frac{1}{h\gamma\sin\theta}\right) = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}.$$

Si l'on développe les calculs relatifs à la condition $B = 0$ l'on retrouve la même équation (17.).

Il est inutile de dire que l'on aurait pu faire le calcul précédent en traitant d'une manière analogue les variations $\frac{dX}{d\varrho}$, $\frac{dX}{d\varrho_1}$, et l'on aurait trouvé la même condition analytique (17.).

Le sens géométrique de l'équation (17.) se détermine facilement. En effet soient $i\,d\varrho$, $i_1 d\varrho_1$ les angles de contingence des courbes ϱ_1 et ϱ, l'on a:

$$i\,d\varrho = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\varrho}{\gamma} = \frac{d\varrho}{h\gamma\sin\theta}, \qquad i_1 d\varrho_1 = \frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{\gamma_1} = \frac{d\varrho_1}{h_1\gamma_1\sin\theta},$$

portant ces valeurs dans l'équation (17.) l'on obtient:

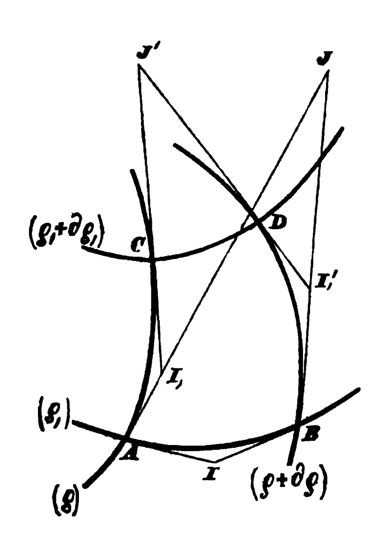
$$(17.)'\qquad \frac{di_1}{d\varrho} + \frac{di}{d\varrho_1} = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}.$$

De cette équation l'on tire immédiatement le théorème suivant:

„La somme des variations des angles de contingence des lignes coordonnées suivant leurs paramètres correspondants est égale à la variation de l'angle de ces lignes coordonnées prise successivement par rapport aux deux paramètres.

VI.

Le théorème précédent peut se démontrer géométriquement d'une manière assez simple. Au point $A(\rho, \rho_1)$ et au point $B(\rho+\partial\rho, \rho_1)$ menons des tangentes aux courbes coordonnées; ces quatre tangentes formeront un quadrilatère. Soit I l'angle infiniment petit que deux tangentes consécutives à la courbe ρ_1 font entre elles, et I' l'angle analogue pour la courbe $\rho_1+\partial\rho_1$; soit J l'angle que font entre elles les deux tangentes aux courbes ρ et $\rho+\partial\rho$ aux points A et B, soit J' l'angle des deux tangentes aux mêmes courbes aux points C et D. Convenons d'employer les caractéristiques ∂_ρ, ∂_{ρ_1} pour exprimer les variations partielles par rapport à ρ et ρ_1, et la caractéristique ∂ pour exprimer la variation totale par rapport à ces deux paramètres. Si l'on remarque que la somme des angles du quadrilatère $AIBJ$ vaut quatre angles droits l'on aura:



$$J-I = (\theta+\partial_\rho\theta)-\theta = \partial_\rho\theta,$$

on trouvera de même pour la courbe $\rho_1+\partial\rho_1$

$$J'-I' = \partial_\rho(\theta+\partial_{\rho_1}\theta) = \partial_\rho\theta+\partial^2_{\rho,\rho_1}\theta.$$

Si nous retranchons la première équation de la seconde, nous trouverons l'équation suivante:

$$(\alpha.) \qquad (J'-J)-(I'-I) = \frac{d^2\theta}{d\rho\, d\rho_1}d\rho\, d\rho_1 = \frac{dJ}{d\rho_1}d\rho_1 - \frac{dI}{d\rho_1}d\rho_1.$$

Si nous faisons le même calcul par rapport aux courbes ρ et $\rho+\partial\rho$ de la série (ρ), et que nous appelions I_1, J_1 les quantités analogues à I et à J nous trouverons

$$-\frac{d^2\theta}{d\rho\, d\rho_1}d\rho\, d\rho_1 = \frac{dJ_1}{d\rho}d\rho - \frac{dI_1}{d\rho}d\rho.$$

De plus dans le quadrilatère $I_1J'I_1'J$ les quatre angles satisfont évidemment à la relation $J'+I_1 = J+I_1'$, on a de même $J_1'+I = J_1+I'$, et parsuite

$$(\delta.) \qquad \frac{dJ}{d\rho_1}d\rho_1 = \frac{dI_1}{d\rho}d\rho,$$

$$(\delta.)' \qquad \frac{dJ_1}{d\rho}d\rho = \frac{dI}{d\rho_1}d\rho_1.$$

Si l'on a égard à ces deux relations, les deux précédentes deviennent:

$$(\beta.)\qquad \frac{dI_1}{d\varrho}d\varrho - \frac{dI}{d\varrho_1}d\varrho_1 = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}d\varrho\, d\varrho_1,$$

$$(\beta.)'\qquad \frac{dJ_1}{d\varrho}d\varrho - \frac{dJ}{d\varrho_1}d\varrho_1 = -\frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}d\varrho\, d\varrho_1,$$

or, l'on reconnait que la première de ces équations ne diffère pas de l'équation (17.)'; la seconde donne sur les angles J, J_1 un théorème analogue à celui qui a été établi sur les angles I, I_1.

VII.

Nous allons développer quelques conséquences de l'équation (17.)'. Cette équation fournit un caractère fondamental propre à chaque système de coordonnées.

Si l'angle sous lequel se coupent les courbes coordonnées est droit, l'on a:

$$\frac{di_1}{d\varrho} + \frac{di}{d\varrho_1} = 0,$$

dont M. *Lamé* a démontré l'existence pour un système orthogonal; mais l'équation (17.)' montre de plus que cette relation a encore lieu si l'angle des coordonnées est constant, ou bien égal à la somme de deux fonctions dont chacune ne dépendrait que d'un seul paramètre ϱ, ϱ_1. Il y a donc une infinité de systèmes de courbes coordonnées se coupant sous un angle constant, ou bien, sous un angle variable, pour lesquels est nulle la somme des variations des angles de contingence par rapport aux paramètres correspondants. Le caractère commun à tous ces systèmes est donné par l'équation aux différences partielles $\frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1} = 0$ dont l'intégrale est $\theta = \varphi(\varrho) + \psi(\varrho_1)$.

Si l'on veut caractériser les systèmes des courbes coordonnées pour lesquels la somme des variations des angles de contingence par rapport aux paramètres correspondants est constante, il faudra poser $\frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1} = a$, a étant une constante. L'intégration de cette équation aux différences partielles fournira pour θ la valeur

$$\theta = a\varrho\varrho_1 + \varphi(\varrho) + \psi(\varrho_1).$$

Généralement, si le système des courbes coordonnées est donné, l'équation (17.)' fera connaître la loi que suit la somme des variations des angles de contingence des courbes par rapport aux paramètres correspondants,

il suffira de calculer $\frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}$ en fonction de ϱ, ϱ_1. Réciproquement, lorsqu'on connaîtra $\frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}$ en fonction de ϱ, ϱ_1, c'est à dire, la loi qui régit la somme des variations des angles de contingence, l'on pourra calculer θ en fonction de ϱ, ϱ_1.

VIII.

Nous nous proposons de calculer les variations des angles de contingence par rapport aux paramètres correspondants.

Nous avons déjà trouvé à la fin du n°. V $i = \frac{1}{\gamma h \sin\theta}$. Si nous prenons la dérivée des deux membres par rapport à ϱ_1, et que nous ayons égard aux équations (5.), nous trouverons:

$$\frac{di}{d\varrho_1} = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{dh}{h\gamma\, d\sigma_1} - \frac{\operatorname{cotg}\theta}{\gamma}\frac{d\theta}{d\sigma_1}\right\}.$$

Eliminons du second membre la dérivée $\frac{dh}{d\sigma_1}$ au moyen des équations trouvées à la fin du n°. IV, et faisons le même calcul sur $\frac{di_1}{d\varrho}$, nous trouverons:

$$(18.)\quad \begin{cases} \frac{di}{d\varrho_1} = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma\sin\theta}\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma_1}\cos\theta\right) + \frac{1}{\gamma\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{d\sigma} - \frac{d\theta}{d\sigma_1}\cos\theta\right)\right\}, \\ \frac{di_1}{d\varrho} = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\left\{\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right) - \frac{1}{\gamma_1\sin\theta}\left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma}\cos\theta\right) + \frac{1}{\gamma_1\sin\theta}\left(\frac{d\theta}{d\sigma_1} - \frac{d\theta}{d\sigma}\cos\theta\right)\right\}. \end{cases}$$

On peut mettre ces deux variations sous une autre forme qu'il est utile de connaître. Introduisons dans les formules (18.) les deux auxiliaires t, t_1 par la condition que l'on ait:

$$(19.)\qquad \frac{1}{t}\sin\theta = \frac{1}{\gamma} - \frac{d\theta}{d\sigma},\qquad \frac{1}{t_1}\sin\theta = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{d\theta}{d\sigma_1}.$$

Si nous éliminons de la première équation (18.) les rayons de courbure γ, γ_1 au moyen de ces dernières relations, nous trouverons

$$\frac{di}{d\varrho_1} = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{t}\sin\theta\right) + \left(\frac{1}{t_1}\cos\theta - \frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t}\sin\theta + \frac{d\theta}{d\sigma}\right) + \frac{d^2\theta}{d\sigma\, d\sigma_1}\right\}.$$

Or, si l'on remarque que l'on a: $\frac{d\theta}{d\sigma_1} = \frac{d\theta}{d\varrho_1}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}$, l'on aura par la différentiation par rapport à σ, en ayant égard aux équations (5.), ainsi qu'aux dernières équations du n°. IV

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma\, d\sigma_1} = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1} - \left(\frac{dh_1}{h_1\, d\sigma} + \operatorname{cotg}\theta\frac{d\theta}{d\sigma}\right)\frac{d\theta}{d\sigma_1},$$

on déduit delà, en introduisant les auxiliaires t et t_1, l'expression suivante que l'on peut écrire de deux manières, suivant que l'on sera parti de $\frac{d\theta}{d\sigma_1}$ ou bien de $\frac{d\theta}{d\sigma}$,

$$\frac{d^2\theta}{d\sigma d\sigma_1} - \frac{d^2\theta}{d\varrho d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1} = \frac{d\theta}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t}\cos\theta\right) = \frac{d\theta}{d\sigma}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_1}\cos\theta\right).$$

Si l'on porte la seconde des deux valeurs que nous venons d'obtenir pour $\frac{d^2\theta}{d\sigma d\sigma_1}$ dans l'expression précedente de $\frac{di}{d\varrho_1}$ on trouvera:

$$(18.)' \begin{cases} \frac{di}{d\varrho_1} = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{t}\sin\theta\right) + \frac{1}{t}\sin\theta\left(\frac{1}{t_1}\cos\theta - \frac{1}{t}\right)\right\} + \frac{d^2\theta}{d\varrho d\varrho_1}, \\ \text{on trouverait de même:} \\ \frac{di_1}{d\varrho} = \frac{d\sigma}{d\varrho}\frac{d\sigma_1}{d\varrho_1}\left\{\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{t_1}\sin\theta\right) + \frac{1}{t_1}\sin\theta\left(\frac{1}{t}\cos\theta - \frac{1}{t_1}\right)\right\} + \frac{d^2\theta}{d\varrho d\varrho_1}. \end{cases}$$

IX.

Donnons maintenant l'interprétation géométrique des auxiliaires t et t_1 que nous avons introduites dans le numéro précédent.

Considérons la courbe ϱ_1 coupée par les deux courbes infiniment voisines ϱ, $\varrho + \partial\varrho$, ainsi que les deux tangentes menées à ces deux courbes aux deux points d'intersection. La distance entre le point de rencontre des deux tangentes et le point de contact est appelé ***rayon oblique de courbure*** de la courbe ϱ_1 parcequ'il se confond avec le rayon de courbure de la courbe ϱ_1 lorsque les courbes de la série (ϱ) coupent orthogonalement les courbes de la série (ϱ_1). Le point de rencontre de deux tangentes consécutives décrit une courbe lorsque l'on fait varier ϱ d'une manière continue. Cette courbe est *la développée oblique* de la courbe ϱ_1. L'angle des deux tangentes infiniment voisines est l'angle de contingence de cette développée oblique, nous l'appelons angle de contingence oblique de la conrbe ϱ_1.

Cela posé, il est aisé de voir que t, t_1 sont les deux rayons de courbure oblique des courbes ϱ_1, ϱ. En effet, reprenons l'expression que nous avons trouvée au commencement du n°. VI, et soit τ le rayon de courbure oblique de la courbe ϱ_1, nous avons

$$J - I = \partial_\varrho\theta, \quad I = \frac{d\sigma}{\gamma}, \quad J = \frac{d\sigma}{\tau}\sin\theta, \quad \partial_\varrho\theta = \frac{d\theta}{d\sigma}d\sigma.$$

Substituons les valeurs de I, J, $\partial_\varrho\theta$ dans la première équation, l'on trouve:

$$\frac{1}{\tau}\sin\theta = \frac{1}{\gamma}+\frac{d\theta}{d\sigma}.$$

On voit que τ est identique avec l'auxiliaire t pourvu que l'arc σ soit compté en sens contraire.

Il est bon de remarquer que l'équation $J = I+\partial_\varrho\theta$ donnera les variations de l'angle de contingence oblique au moyen de la variation de l'angle de contingence que nous avons calculée dans le numéro précédent, et de la double variation de l'angle θ; on doit donc regarder comme connues les variations des angles de contingence oblique par rapport aux paramètres correspondants.

X.

Les relations que nous avons établies dans le n°. VI sur les variations des angles de contingence des courbes coordonnées donnent des théorèmes non moins importants sur les courbures de ces courbes, nous allons démontrer ces divers théorèmes dans les deux numéros suivants.

Portons les valeurs des variations des angles de contingence données par les équations (18.) dans l'équation (17.)', nous obtenons

$$(20.)\quad \begin{cases} \left\{\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\}\sin\theta-\left\{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma_1^2}-\frac{2\cos\theta}{\gamma\gamma_1}\right\}+\frac{d\theta}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma_1}\cos\theta\right) \\ \qquad +\frac{d\theta}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma_1}-\frac{1}{\gamma}\cos\theta\right) = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}\sin\theta. \end{cases}$$

Soit $\frac{1}{G}$ la résultante des courbures $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\gamma_1}$ d'après la règle de la composition des forces, λ et λ_1 les angles de cette résultante avec les rayons γ, γ_1 l'équation précédente s'écrira:

$$(20.)'\quad \begin{cases} \left\{\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\}\sin\theta-\frac{1}{G^2}+\frac{1}{G}\left(\cos\lambda\frac{d\theta}{d\sigma}+\cos\lambda_1\frac{d\theta}{d\sigma_1}\right) \\ \qquad = \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}\sin\theta. \end{cases}$$

Si le système des coordonnées est orthogonal, les variations de l'angle θ sont nulles, et le cosinus de cet angle est aussi nul; par suite l'équation précédente dévient:

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)-\frac{1}{\gamma^2}-\frac{1}{\gamma_1^2} = 0,$$

ce qui est le théorème de M. *Lamé* sur les variations des courbures des courbes coordonnées.

Si l'angle du système des coordonnées est constant, les variations de cet angle sont nulles, et la formule (20.) devient:

$$\left\{\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\}\sin\theta-\left\{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma_1^2}-\frac{2\cos\theta}{\gamma\gamma_1}\right\}=0,$$

delà on déduit ce théorème: „Le rapport de la somme des variations des courbures des courbes coordonnées suivant les arcs réciproques au carré de la résultante des courbures est égal au rapport de l'unité au sinus de l'angle des courbes coordonnées, lorsque ces courbes se coupent sous un angle constant".

Le même théorème n'a plus lieu lorsque l'angle θ est donné par la formule $\theta=\varphi(\varrho)+\psi(\varrho_1)$, voyez n°. VII. Dans ce cas l'on a:

$$\left\{\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)+\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right\}\sin\theta-\frac{1}{G^2}+\frac{1}{G}\left(\cos\lambda\frac{d\theta}{d\sigma}+\cos\lambda_1\frac{d\theta}{d\sigma_1}\right)=0.$$

XI.

Les théorèmes que nous avons établis dans le n°. VI sur les variations des angles de contingence oblique donnent aussi naissance à des théorèmes correspondants sur les variations des courbures obliques des courbes coordonnées, comme nous allons le montrer.

Si l'on porte les valeurs de $\frac{di}{d\varrho_1}$, $\frac{di_1}{d\varrho}$ tirées des équations (18.)' dans l'équation (17.)', l'on aura la relation:

$$(21.)\quad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{\sin\theta}{t}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\sin\theta}{t_1}\right)-\left\{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t_1^2}-\frac{2\cos\theta}{t\,t_1}\right\}\sin\theta+\frac{d^2\theta}{d\varrho\,d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}=0.$$

Si l'on représente par $\frac{1}{T}$ la résultante des courbures obliques $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t_1}$, on pourra écrire l'équation précédente sous la forme

$$(21.)'\quad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{t_1}\right)-\frac{1}{T^2}+\operatorname{cotg}\theta\left(\frac{d\theta}{t\,d\sigma_1}+\frac{d\theta}{t_1\,d\sigma}\right)+\frac{d^2\theta}{d\varrho\,d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}\frac{1}{\sin\theta}=0.$$

Si l'angle θ est constant l'on aura:

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{t_1}\right)-\frac{1}{T^2}=0,$$

de laquelle on déduit le théorème suivant. „Le rapport des variations des courbures obliques des courbes coordonnées suivant leurs arcs réciproques au carré de la résultante de ces courbures est l'unité."



Si l'on ajoute l'équation (20.)' à l'équation (21.) l'on trouvera:

$$(22.)\left\{\begin{aligned}&\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)\right\}\sin\theta+\left\{\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{\sin\theta}{t}\right)+\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{\sin\theta}{t_1}\right)\right\}\sin\theta-\frac{1}{G^2}-\frac{1}{T^2}\sin^2\theta\\&\qquad+\frac{1}{G}\left(\cos\lambda\frac{d\theta}{d\sigma}+\cos\lambda_1\frac{d\theta}{d\sigma_1}\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Il est aisé de voir que les équations (21.) sont la traduction analytique du théorème de géométrie donné par la seconde des équations (β.) du n°. VI, et que l'équation (22.) est la traduction analytique du théorème de géométrie qui serait donné par l'équation résultant de l'addition des équations (β.) et (β.)':

„La somme des variations des angles de contingence des courbes coordonnées suivant leurs paramètres correspondants, et des variations des angles de contingence oblique des mêmes courbes suivant les mêmes paramètres est nulle."

XII.

Il nous reste à appliquer les formules que nous avons trouvées à quelques exemples.

Pour premier exemple prenons pour courbes coordonnées une série de cercles concentriques, et une série de droites parallèles

$$x^2+y^2-\varrho^2=0, \qquad x-\varrho_1=0.$$

L'on a:

$$\frac{1}{\gamma}=0, \quad \frac{1}{\gamma_1}=\frac{1}{\varrho}, \quad h=1, \quad h_1=1, \quad \cos\theta=\frac{\varrho_1}{\varrho},$$

$$-\frac{d\varrho}{d\sigma}=\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}=\sin\theta, \quad \frac{d\theta}{d\sigma}=-\frac{\varrho_1}{\varrho^2}, \quad \frac{d\theta}{d\sigma_1}=-\frac{1}{\varrho}, \quad \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1}\frac{d\varrho}{d\sigma}\frac{d\varrho_1}{d\sigma_1}=-\frac{1}{\varrho^2\sin\theta},$$

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)=\frac{1}{\varrho^2}\sin\theta, \quad \frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=0.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (20.) on trouve une identité

$$\frac{\sin^2\theta}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho^2}+\frac{\cos^2\theta}{\varrho^2}=-\frac{1}{\varrho^2}.$$

Prenons pour second exemple une série de cercles concentriques, et une série de cercles tangents entre eux en un point fixe qui serait le centre des cercles de la première série. Les équations de ces cercles en coordonnées polaires r et ω sont:

$$r-\varrho=0, \qquad \cos\omega=\frac{\varrho}{\varrho_1}.$$



L'on a

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = \sin\theta, \quad \frac{d\varrho_1}{d\sigma_1} = -\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}, \quad \cos\theta = \frac{\varrho}{\varrho_1},$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{2}{\varrho_1}, \quad \frac{1}{\gamma_1} = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{d\theta}{d\sigma_1} = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{1}{t}\sin\theta = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{1}{t_1}\sin\theta = \frac{2}{\varrho},$$

$$\frac{d}{d\sigma_1}\left(\frac{1}{t}\sin\theta\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\sin\theta, \quad \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{t_1}\sin\theta\right) = -\frac{2}{\varrho^2}\sin\theta, \quad \frac{d^2\theta}{d\varrho\, d\varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1^2\sin\theta} + \frac{\cos^4\theta}{\varrho^2\sin^3\theta}.$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (21.) dans laquelle les arcs doivent être comptés en sens inverse l'on aura:

$$-\frac{\sin\theta}{\varrho^2} - \frac{2\sin\theta}{\varrho^2} + \frac{\cos^2\theta}{\varrho^2\sin\theta} + \frac{4}{\varrho^2\sin\theta} - \frac{4\cos^2\theta}{\varrho^2\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\varrho^2} - \frac{\cos^2\theta}{\varrho^2\sin\theta} = 0,$$

or, si l'on réduit tous les termes au même dénominateur le premier membre devient nul.

Marseille, 4 octobre 1860.

Bemerkung zu der Abhandlung Seite 80 dieses Bandes über die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right].$$

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

In der obengenannten Abhandlung wird die vorliegende partielle Differentialgleichung auf eine andere zurückgeführt, die in einer allgemeineren von ***Poisson*** behandelten und integrirten Form enthalten ist, nämlich in der folgenden:

$$(26.)\qquad \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+m\frac{V}{t^2}=\Phi=0,$$

wo $m=i^2-\frac{1}{4}$ und i eine ganze Zahl ist, eine Gleichung, von welcher Herr ***Fuchs*** den besonderen Fall $i=1$ gebraucht. ***Poisson*** behandelt im Journal de l'école polytechnique, cahier 19, die Gleichung (26.) allgemein, ohne die Einschränkung zu machen, dafs i eine ganze Zahl sei. Der Fall, wo i eine ganze Zahl ist, bildet sogar bei ihm einen Ausnahmefall, und es trifft der eigenthümliche Umstand ein, dafs, während seine allgemeinen Resultate richtig sind, das für den Ausnahmefall gegebene Resultat durch Rechnungsfehler entstellt ist. Da es nun gerade das auf diesen Ausnahmefall bezügliche fehlerhafte ***Poisson***sche Resultat ist, welches Herr ***Fuchs*** in seiner Gleichung (28.) citirt und wovon er in Gleichung (30.) den besonderen Fall $i=1$ angewendet hat, so benutze ich diese Gelegenheit, um auf den ***Poisson***schen Rechnungsfehler aufmerksam zu machen, und zugleich das richtige Resultat mitzutheilen.

Der wesentliche Fehler des ***Poisson***schen Resultates besteht in der Bestimmung der mit q' bezeichneten Function, das mit $-q'\sin^{2i}\lambda$ verbundene Glied $\frac{1}{2i}$ mufs durch ein logarithmisches Glied ersetzt werden. Ueberdies hat die von ***Poisson*** verlangte Bestimmung der Constante c' (s. die beiden letzten Gleichungen (29.) in der Abhandlung des Herrn ***Fuchs***) keine Bedeutung, da diese Constante vielmehr willkürlich bleibt und mit der in (28.) vorkommenden willkürlichen Function φ verschmilzt. Endlich darf man nicht vergessen, dafs die von ***Poisson*** angewandte und von Herrn ***Fuchs*** beibehaltene Bezeichnung

ψ' nicht nach dem gewöhnlichen Gebrauch die erste, sondern die $2i^{\text{te}}$ Ableitung von ψ vorstellt, so dafs in der Gleichung (30.) des Herrn *Fuchs*, wo $i=1$ gesetzt ist, ψ' dasjenige bedeutet, was man mit ψ'' zu bezeichnen pflegt.

Um das wahre Integral der oben angeführten partiellen Differentialgleichung $\Phi=0$ zu erhalten, setze ich unter Beibehaltung des im *Poisson*schen Resultate Richtigen in dieselbe zunächst den Werth ein:

$$V = t^{i+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \varphi(t\cos\lambda + av)\{\log t + Q\}\sin^{2i}\lambda\, d\lambda,$$

wo Q eine noch zu bestimmende Function von λ bedeutet, dann erhält man nach zwei theilweisen Integrationen:

$$\Phi = t^{i-\frac{1}{2}}\varphi(t+av)2i\int_0^\pi \sin^{2i}\lambda\,\partial\lambda$$

$$+t^{i-\frac{1}{2}}\int_0^\pi \varphi'(t\cos\lambda+av)\Big[\Big(\frac{\partial Q}{\partial\lambda}-2\cot\lambda\Big)\sin^{2i+1}\lambda - 2i\sin\lambda\int_\pi^\lambda \sin^{2i}\lambda\,\partial\lambda\Big]\partial\lambda.$$

Um das Integral verschwinden zu machen, hat man, wenn der Kürze wegen

$$q = \int_\pi^\lambda \sin^{2i}\lambda\,\partial\lambda, \quad b = \int_0^\pi \sin^{2i}\lambda\,\partial\lambda = \pi\frac{1.3\ldots 2i-1}{2.4\ldots\ldots 2i}$$

gesetzt wird, Q durch die Gleichung

$$\frac{\partial Q}{\partial\lambda} - 2\cot\lambda - \frac{2iq}{\sin^{2i}\lambda} = 0$$

zu bestimmen, woraus

$$Q = 2\log\sin\lambda + 2i\int\frac{q\,\partial\lambda}{\sin^{2i}\lambda} + \text{const.}$$

folgt, und es bleibt dann

$$\Phi = 2ibt^{i-\frac{1}{2}}\varphi(t+av)$$

übrig, welchem auch andrerseits die folgende Reihensumme:

$$V = t^{-i+\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{n=2i-1} A_n t^n \psi^{(n)}(t+av)$$

für $\varphi t = \psi^{(2i)}t$ und für gehörig bestimmte Werthe der Coefficienten A genügt.

Die beiden gefundenen Ausdrücke V von einander abgezogen geben eine Lösung V der partiellen Differentialgleichung $\Phi=0$. In dieser Lösung kommt die in Q enthaltene willkürliche Constante vor. Subtrahirt man zwei Werthe dieser Lösung, die sich nur durch die Werthe der willkürlichen Constanten unterscheiden, so ergiebt sich als Particularlösung

$$V = t^{i+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \varphi(t\cos\lambda+av)\sin^{2i}\lambda\,\partial\lambda,$$

wo φ willkürlich und unabhängig von der Function ψ ist, während der von der willkürlichen Constanten unabhängige Theil eine zweite Particularlösung liefert. Alles vereinigt giebt als vollständiges Integral der Gleichung (26.):

$$V = t^{i+1}\int_0^\pi \Big[\varphi(t\cos\lambda+av)+\psi^{(2i)}(t\cos\lambda+av)\Big(\log(t\sin^2\lambda)+2i\int\frac{q\,\partial\lambda}{\sin^{2i}\lambda}\Big)\Big]\sin^{2i}\lambda\,\partial\lambda$$
$$-t^{-i+1}\sum_{n=0}^{n=2i-1} A_n t^n \psi^{(n)}(t+av),$$

wo

$$A_n = \frac{2i(2i-1)\dots(n+1).1.2\dots(2i-n-1)}{(2i-1)(2i-3)\dots(2n-2i+1)}\,b$$

und

$$b = \pi\frac{1.3\dots 2i-1}{2.4\dots\dots 2i}$$

zu setzen ist.

Ich gehe nun zu der von Herrn ***Fuchs*** bewerkstelligten Zurückführung der vorliegenden Differentialgleichung auf die ***Poisson***sche über. Herr ***Fuchs*** braucht dazu vier auf einander folgende Transformationen, von denen jedoch die drei letzten sich zu einer einzigen sehr einfachen zusammensetzen. Die ganze Zurückführung nimmt hierdurch folgende Gestalt an:

Die gegebene Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big[1+\Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2\Big] = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big[1+\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2\Big]$$

geht, indem man

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

als unabhängige Variable und

$$\omega = xp+yq-z$$

als gesuchte Function einführt, über in

$$(1+p^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial p^2} = (1+q^2)\frac{\partial^2\omega}{\partial q^2}.$$

Die neue Substitution

$$t = \sqrt{1+p^2}\sqrt{1+q^2},\qquad v = pq$$

verwandelt diese Gleichung in folgende:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}-\frac{1}{t}\,\frac{\partial\omega}{\partial t},$$

deren vollständige Lösung ist:

$$\omega = \frac{t^2}{\pi}\int_0^\pi[\varphi(t\cos\lambda+v)+\psi''(t\cos\lambda+v)(\log(t\sin^2\lambda)+(\pi-\lambda)\cot\lambda)]\sin^2\lambda\,\partial\lambda$$
$$-t\psi'(t+v)+\psi(t+v).$$

Die Gleichung der Flächen, welche durch die gegebene partielle Differential-



gleichung characterisirt sind, entspringt demnach aus der Elimination von t und v zwischen den drei Gleichungen:

$$x = \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial \omega}{\partial q}, \quad z = xp + yq - \omega,$$

wo

$$p = \sqrt{\frac{t^2-(v-1)^2}{2}} + \sqrt{\frac{t^2-(v+1)^2}{2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{t^2-(v-1)^2}{2}} - \sqrt{\frac{t^2-(v+1)^2}{2}},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = \left[(1+2v)\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\right]\sqrt{\frac{t^2-(v-1)^2}{2}} + \left[(1-2v)\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial v}\right]\sqrt{\frac{t^2-(v+1)^2}{2}},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial q} = \left[(1+2v)\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial v}\right]\sqrt{\frac{t^2-(v-1)^2}{2}} - \left[(1-2v)\frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \omega}{\partial v}\right]\sqrt{\frac{t^2-(v+1)^2}{2}}$$

zu setzen ist.

In Betreff der speciellen Auflösung, welche Herr *Fuchs* auf die Differentialgleichung

$$y'' = \frac{cy}{1+x^2}$$

zurückführt, deren Integral er in Reihen nach Potenzen von x entwickelt, ist zu bemerken, dafs diese Differentialgleichung als besonderer Fall in der bekannten Differentialgleichung

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0$$

der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (nach der *Gaufs*schen Bezeichnung) enthalten ist, unter deren Particularlösungen (*Kummer,* über die hypergeometrische Reihe, Bd. 15, S. 52 dieses Journals No. 3 und 7) sich auch die beiden folgenden:

$$x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x),$$
$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x)$$

befinden. In dem besonderen Falle:

$$\beta = -\alpha-1, \quad \gamma = 0$$

hat man also für die Differentialgleichung:

$$x(1-x)y'' + \alpha(\alpha+1)y = 0$$

die beiden Particularlösungen:

$$xF(\alpha+1, -\alpha, 2, x),$$
$$(1-x)F(-\alpha, \alpha+1, 2, 1-x)$$

oder, indem man für die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = F(\beta, \alpha, \gamma, x)$ das ihr pro-

portionale Integral $\int_0^1 du\, u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}$ einführt, die beiden Particularlösungen, welche aus dem Integral

$$\xi\int_0^1 du\left\{\frac{u}{1-u}(1-\xi u)\right\}^\alpha$$

für $\xi = x$ und $\xi = 1-x$ hervorgehen. Indem man nun

$$x = \frac{1+z\sqrt{-1}}{2}$$

setzt, so dafs $1-x=\frac{1-z\sqrt{-1}}{2}$, $x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} = -(1+z^2)\frac{d^2y}{dz^2}$ wird, und dann wieder x für z schreibt, giebt das obige Integral zwei Particularlösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha(\alpha+1)\frac{y}{1+x^2},$$

wenn man in demselben $\xi=\frac{1+x\sqrt{-1}}{2}$ und $\xi=\frac{1-x\sqrt{-1}}{2}$ setzt.

Bestimmt man α aus der Gleichung $\alpha(\alpha+1)=c$, und sind X, $X_1\sqrt{-1}$ der reelle und imaginäre Theil des Integrals

$$X+X_1\sqrt{-1} = \frac{1+x\sqrt{-1}}{2}\int_0^1 du\left\{\frac{u}{1-u}\left(1-\frac{1+x\sqrt{-1}}{2}u\right)\right\}^\alpha,$$

so ist also

$$y = CX+C_1X_1,$$

wo C, C_1 willkürliche Constanten sind, das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{cy}{1+x^2}$$

des Herrn *Fuchs*. Für ein reelles α ist es zur Gültigkeit des hier gegebenen bestimmten Integrals nothwendig, dafs der numerische Werth von α kleiner als 1 ist. Aber auch für andere Werthe von α wird die in Rede stehende Differentialgleichung durch bestimmte Integrale integrirt (s. *Jacobi*, zur hypergeometrischen Reihe, Bd. 58, S. 149 dieses Journals).

Berlin, den 22sten September 1860.



Ueber die Umhüllungslinie der Pollinien einer Curve und deren inverse Linie.

(Von Herrn *R. Hoppe.*)

Die Beziehungen zwischen der in Rede stehenden Linie und ihrer Urcurve zeigen einige Aehnlichkeit mit denen zwischen der Evolvente und Evolute. Wie die Darstellung der Evolute in Elementen der Evolvente durch die Torsion der letztern vermittelt wird, so dient hier die Krümmung zum gleichen Zwecke. Ich nenne deshalb die Umhüllungslinie der Pollinien einer Curve die ***Involvente*** der letztern, und jede Curve, deren Involvente eine andere Curve ist, eine ***Involute*** derselben. Die Darstellung der Involute in Elementen der Involvente ist der Inhalt des Folgenden.

Für einige häufig vorkommende Gröfsen sei es mir in Ermangelung gebräuchlicher Namen gestattet, hier die folgenden zu wählen. Ist $\tau' = \frac{1}{\varrho}$ die Krümmung, ϑ' die Torsion einer Curve, so heifse

$$\tau = \int \tau' \partial s = \int \frac{\partial s}{\varrho},$$

d. i. das Integral des Contingenzwinkels der Tangenten, der ***Krümmungswinkel;***

$$\vartheta = \int \vartheta' \partial s,$$

d. i. das Integral des Contingenzwinkels der Osculationsebenen, der ***Torsionswinkel;***

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \operatorname{tg} \lambda$$

das ***Krümmungsverhältnifs;*** und λ zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ genommen die ***Krümmungsbreite.***

Es sei nun (x, y, z) ein Punkt der Involute, (x_1, y_1, z_1) der entsprechende der Involvente; ebenso mag der Index 1 bei andern Buchstaben ausdrücken, dafs sie sich auf die Involvente beziehen. Ferner seien l, m, n die Cosinus der Richtungswinkel der Pollinie. Die Accente bezeichnen die Differentialquotienten nach dem jedesmal zugehörigen Curvenbogen. Dann sind die Gleichungen der Pollinie der Involute:

$$x_1 = x + \varrho^2 x'' + ul, \qquad y_1 = y + \varrho^2 y'' + um, \qquad z_1 = z + \varrho^2 z'' + un,$$

wo u das Stück der Pollinie vom Krümmungsmittelpunkt bis zum Punkt (x_1, y_1, z_1) ausdrückt. Läfst man s bei constanten x_1, y_1, z_1 in $s+\partial s$ übergehen, so geht u über in

$$u+\partial u-\partial s_1$$

und man erhält durch Differentiation der Gleichungen:

$$0 = \varrho\varrho' x'' + \varrho\vartheta' l - u\varrho\vartheta' x'' + \frac{\partial u - \partial s_1}{\partial s} l$$

nebst zwei analogen Gleichungen. Die Quadratsumme aller drei giebt:

$$0 = (\varrho' - u\vartheta')^2 + \left(\varrho\vartheta' + \frac{\partial u - \partial s_1}{\partial s}\right)^2,$$

woraus

$$u = \frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta},$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial s} = \varrho\vartheta' + \frac{\partial u}{\partial s} = \vartheta'\left(\varrho + \frac{\partial^2\varrho}{\partial\vartheta^2}\right).$$

Nach Einführung des Werthes von u in die Gleichungen der Pollinie gehen diese in die der Involvente über, nämlich:

$$x_1 = x + \varrho^2 x'' + \frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta} l, \quad y_1 = y + \varrho^2 y'' + \frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta} m, \quad z_1 = z + \varrho^2 z'' + \frac{\partial\varrho}{\partial\vartheta} n.$$

Differentiirt geben sie:

$$x_1' \frac{\partial s_1}{\partial s} = \varrho\vartheta' l + \frac{\partial^2\varrho}{\partial\vartheta^2}\vartheta' l = l\frac{\partial s_1}{\partial s}$$

nebst zwei analogen Gleichungen, woraus:

$$(1.) \qquad x_1' = l, \qquad y_1' = m, \qquad z_1' = n.$$

Nach nochmaliger Differentiation erhält man:

$$(2.) \qquad x_1'' \frac{\partial s_1}{\partial s} = -\varrho\vartheta' x'', \quad \text{etc.}$$

und als Quadratsumme der drei Gröfsen:

$$\frac{1}{\varrho_1^2}\left(\frac{\partial s_1}{\partial s}\right)^2 = \vartheta'^2,$$

woraus

$$(3.) \qquad \varrho_1 = \frac{\partial s_1}{\partial\vartheta} = \varrho + \frac{\partial^2\varrho}{\partial\vartheta^2}$$

oder auch

$$\partial\vartheta = \frac{\partial s_1}{\varrho_1} = \partial\tau_1.$$

Läfst man die Gröfsen s, τ, ϑ, s_1, τ_1, ϑ_1, deren jede eine willkürliche Constante enthält, gleichzeitig verschwinden, so ist

$$(4.) \qquad \vartheta = \tau_1.$$

Ferner ergiebt sich durch Multiplication der Gleichungen (2.), (3.):

$$(5.)\qquad \varrho_1 x_1'' = -\varrho x'', \quad \varrho_1 y_1'' = -\varrho y'', \quad \varrho_1 z_1'' = -\varrho z'',$$

woraus wiederum in Verbindung mit den Gleichungen (1.) hervorgeht:

$$l_1 = \varrho_1(y_1' z_1'' - z_1' y_1'') = \varrho(y'' n - z'' m) = x'$$

und nach Analogie:

$$l_1 = x', \quad m_1 = y', \quad n_1 = z'.$$

Dies wiederum differentiirt giebt:

$$-\vartheta' \varrho_1 x_1'' \frac{\partial s_1}{\partial s} = x'', \quad \text{etc.}$$

oder in Folge der Gleichungen (5.):

$$\partial \vartheta_1 = \frac{\partial s}{\varrho} = \partial \tau,$$

$$\vartheta_1 = \tau.$$

Dies in Verbindung mit Gleichung (4.) giebt:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \tau_1} = \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg}\lambda_1 \operatorname{tg}\lambda = 1,$$

woraus:

$$\lambda + \lambda_1 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Die einzige noch fehlende Relation liefert die Integration der Gleichung (3.), die nach Substitution von τ_1 für ϑ lautet:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial \tau_1^2} + \varrho = \frac{\partial s_1}{\partial \tau_1},$$

und das Integral hat:

$$\varrho = \sin\tau_1 \int \partial s_1 \cos\tau_1 - \cos\tau_1 \int \partial s_1 \sin\tau_1,$$

woraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varrho}{\partial \tau_1} = \cos\tau_1 \int \partial s_1 \cos\tau_1 + \sin\tau_1 \int \partial s_1 \sin\tau_1.$$

Nach Substitution der gefundenen Werthe in die Gleichungen der Involvente erhält man:

$$x = x_1 + \varrho_1 x_1'' \left(\sin\tau_1 \int \partial s_1 \cos\tau_1 - \cos\tau \int \partial s_1 \sin\tau_1\right)$$
$$- x_1' \left(\cos\tau_1 \int \partial s_1 \cos\tau_1 + \sin\tau_1 \int \partial s_1 \sin\tau_1\right)$$

nebst zwei analogen Gleichungen, welche zusammen die Involute in Elementen der Involvente darstellen.

In den Beziehungen zwischen beiden Curven zeigt sich eine bemerkenswerthe Reciprocität. Die Hauptnormalen sind einander parallel, die Richtungen der Tangenten und Pollinien hingegen vertauscht. Als natürliche Folge davon sind dann auch Krümmungswinkel und Torsionswinkel vertauscht, und die Krümmungsbreiten gegenseitige Complemente.

Da bekanntlich alle parallelen Curven eine gemeinsame Pollinie haben, so haben sie offenbar auch eine gemeinsame Involvente. Es ist auch ersichtlich, dafs umgekehrt alle Involuten derselben Curve einander parallel sind; denn da mit der Pollinie auch der laufende Punkt der Involvente auf der Normalebene jeder Involute liegt, so ist diese Normalebene allen gemein. In der That gehen auch die Gleichungen einer Parallele ganz einfach aus denen der Involute hervor. Zwei Involuten derselben Curve unterscheiden sich nur durch die in den beiden Integralen enthaltenen Constanten. Subtrahirt man also die entsprechenden Coordinaten beider, die mit x, y, z, x_2, y_2, z bezeichnet sein mögen, so kommt:

$$x_2 = x + \varrho_1 x_1'' a \sin(\tau_1 + c) - x_1' a \cos(\tau_1 + c).$$

Setzt man für $\varrho_1 x_1''$, x_1', τ_1 ihre Werthe $-\varrho x''$, l, ϑ, so hat man die Gleichung der Parallele.

Berlin, den 8ten September 1860.

Ueber Modulargleichungen der elliptischen Functionen, Auszug aus einem Schreiben an Herrn *L. Kronecker*.

(Von Herrn *H. Schröter* zu Breslau.)

... Ihre Entwickelung des Cubus von $\Theta(K)$ *) gab mir neulich Veranlassung, aus der im §. 2 meiner Dissertation **) aufgestellten Formel (5.) für den speciellen Fall $p = 3$ einige Folgerungen zu ziehen, welche schliefslich auf die von *Jacobi* im 21sten Bande dieses Journals pag. 18 gegebene Gleichung

$$\{\Sigma(-1)^m x^{(6m+1)^2}\}^3 = \Sigma(-1)^n (2n+1) x^{3(2n+1)^2}$$

führten. Indem ich diese benutzte, um die Modulargleichungen für die Transformation der Ordnungen (3.2^n-1) in ähnlicher Weise zu bilden, wie ich es in meiner Dissertation für die Ordnungen (2^n-1) gethan, habe ich für die 5te, 11te und 23ste Ordnung die folgenden irrationalen Formen der Gleichungen erhalten, welche meine früheren Ergebnisse ab Einfachheit übertreffen:

5te Ordnung

$$\sqrt{k} - \sqrt{\lambda} = \sqrt[3]{4k'\lambda'}.\sqrt[12]{k\lambda},$$

11te Ordnung

$$\sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4k\lambda k'\lambda'} = 1,$$

23ste Ordnung

$$\sqrt[4]{k\lambda} + \sqrt[4]{k'\lambda'} - \sqrt[4]{k\lambda k'\lambda'} + 2\sqrt[6]{4k\lambda k'\lambda'} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + k\lambda + k'\lambda')}.$$

Für die 5te Ordnung hat *Jacobi* schon (Fundamenta pag. 69) die Gleichung in obiger Gestalt angegeben. Für die 11te Ordnung konnte ich die Modulargleichung in rationaler Form aus der obigen irrationalen ohne grofse Rechnung herstellen und erhielt so:

*) Bd. 57, S. 253 dieses Journals.

**) „De aequationibus modularibus" Dissertatio inauguralis. Regiomonti Pr. 1854.

$$\{u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2)\}^3 + 16uv(1-u^2v^2)\{(u^4-v^4)^2 - 2(1+u^2v^2)^4\}$$
$$+ 32u^2v^2(u^4-v^4)\{(1-u^2v^2)^2 + 8u^2v^2\} = 0,$$

wo $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{\lambda} = v$ gesetzt ist.

Unter den Modulargleichungen der Ordnungen (2^n-1) ist es besonders die für die 31ste, welche ich neuerdings in einer einfacheren irrationalen Gestalt habe darstellen können. Ich fand für dieselbe

$$1 + \sqrt{k\lambda} + \sqrt{k'\lambda'} - \sqrt[4]{k\lambda} - \sqrt[4]{k'\lambda'} - \sqrt[4]{k\lambda k'\lambda'} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + k\lambda + k'\lambda')},$$

eine Gleichung, welche vor den beiden in meiner Dissertation enthaltenen Formen den Vorzug verdient.

Breslau, den 18ten April 1860.

Druckfehlerverzeichnifs.

Band 57.

S. 185 In der Determinante T sind in den mit n und $n+1$ bezeichneten Horizontalreihen b_{n-1} und b_n um eine Stelle nach rechts zu rücken, so dafs b_n an die Stelle der dort stehenden Nullen tritt. Ferner sind in der mit $m+n-1$ bezeichneten Horizontalreihe b_0, b_1 um zwei Stellen nach links zu rücken.

S. 336 Z. 12 v. o. statt sämmtlich mit der 0ten lies bezüglich mit der 0ten, 0ten, 1ten Potenz.

Band 58.

S. 133 Z. 3 v. o. statt $v = f(m, n)$ lies $m^{-\varrho} v = f(m, n)$.

